ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

DIRECTOR: JOSE S. GANDOLFO

ENERO-JUNIO 1963 — ENTREGAS I a VI — TOMO CLXXV

SUMARIO

BUENOS AIRES
AVDA. SANTA FE 1145

1963

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Art. 10 del Reglamento de los "ANALES" (modificado por la J. D. en su sesión de fecha 4 de Septiembre de 1941). Los escritos originales destinados a la Dirección de los "Anales", serán remitidos a la Gerencia de la Sociedad, Avenida Santa Fe 1145, a los efectos de registrar la fecha de entrega para luego enviarlos al señor Director.

Impreso en Imprenta López - Perú 666 - Buenos Aires - República Argentina

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

Director: JOSE S. GANDOLFO

TOMO CLXXV

BUENOS AIRES
Avda. Santa Fe 1145

1963

"GRUPOS INCOGNITOS" Y "GRUPOS DE CAMBIO DE FUNDAMENTAL" EN LA RESOLUCION DE ESQUEMAS HIPERESTATICOS (*)

Ing. ARTURO BIGNOLI

I — *INTRODUCCION*

1 — Para resolver un sistema hiperestático elástico proporcional, el problema principal es el de la elección de las incógnitas $X_i (i = 1 ... n)$, entre las que luego se plantearán las ecuaciones lineales que permitirán calcular sus valores.

$$\left[e_i^o + \sum_{j=1}^{j=n} e_{ij}^o X_j = 0\right]_{i=1}^{i=n} \qquad [1]$$

Todos los esfuerzos, hasta el presente, han sido dirigidos hacia la búsqueda y el perfeccionamiento de las formas de resolución de dicho sistema de ecuaciones, aún disfrazando a veces dicha resolución y hasta las ecuaciones mismas, en razonamientos sostenidos por el análisis físico de la estructura.

Con la aparición de las modernas computadoras electrónicas, la resolución de un sistema de ecuaciones lineales ha dejado de ser un problema. Basta presentar a la computadora tres matrices de coeficientes del sistema para obtener las solicitaciones en el hiperestático, lo que resuelve el problema (**).

Pierde pues toda importancia la resolución de las ecuaciones y más aún, deja de tener razón de ser, el hablar siquiera de métodos de resolución de hiperestáticos.

Queda aún, con toda su importancia, el problema de elegir las incógnitas en forma tal que las matrices que se presentarán a la computadora sean tan simples y de rápida obtención como resulte posible.

Cuando se eligen las llamadas incógnitas elásticas o magnitudes de deformación o geométricas y éstas son giros de nudos y de direc-

(*) El mismo tema fue dictado, en cursillo especial, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, en julio de 1962.

(**) Véase para el planteo matricial de la resolución de hiperestáticos, J. H. Argyris: "Energy Theorems and Structural Analysis", Aircraft Engineering, 1954.

ciones de barras, el sistema fundamental que resulta, y en el que se plantean las ecuaciones, es siempre una sucesión de piezas doblemente empotradas o empotrado-articuladas. Esto significa que una vez decidido que se utilizarán dichas incógnitas elásticas, el resto del proceso queda condicionado, pues no hay más que un sistema fundamental posible, el que es, en todos los casos, un conjunto de barras doblemente empotradas o empotrado-articuladas.

En cambio, si se resuelve utilizar incógnitas estáticas o magnitudes de fuerza, porque para el problema que se analice se consideran más convenientes (por ser su cantidad menor que la de las elásticas por ejemplo), se presenta inmediatamente la posibilidad de elegir el sistema fundamental en el que se plantearán las ecuaciones. Es decir que habrá que elegir un conjunto de incógnitas estáticas que permitan resolver el problema hiperestático, de entre los infinitos conjuntos posibles.

Si queremos elegir estas incógnitas en forma tal que el conjunto de coeficientes e^o_{ij} $(i = 1 \ldots n;\ j = 1 \ldots n)$ y términos de causa e^o_i $(i = 1 \ldots n)$ sea el menos numeroso o tenga la mayor cantidad de elementos nulos, deberemos tratar que en las expresiones que se usan para calcular dichos valores, y que son las conocidas:

$$e^o_{ij} = \sum_b \int \overline{M}_i \overline{M}_j \frac{ds}{EJ} + \sum_b \int \overline{N}_i \overline{N}_j \frac{ds}{EF} \cdot$$

$$e^o_i = \sum_b \int M_c \overline{M}_i \frac{ds}{EJ} + \sum_b \int N_c \overline{N}_i \frac{ds}{EF} \cdot \qquad [2]$$

las funciones $\overline{M}_i$, $\overline{M}_j$, M_c, $\overline{N}_i$, $\overline{N}_j$, N_c, con los significados sabidos, sean tales que los integrales de sus productos resulten nulos (funciones ortogonales) o por lo menos que interesen la menor cantidad posible de zonas comunes sobre la estructura, o que en dichas zonas comunes tengan condiciones de simetría cuando la otra función es antimétrica o viceversa.

De esta manera se conseguirá que la matriz de coeficientes se aproxime lo más posible a una matriz diagonal que sería el caso ideal correspondiente a términos laterales nulos ($e^o_{ij} = 0$, $i \neq j$) y por lo tanto ecuaciones independientes, cada una con una sola incógnita.

Puede ocurrir con frecuencia que no se consiga una elección óptima del sistema fundamental y que, por ejemplo, si el cálculo de los e^o_i resulta muy simple, no lo sea el de los e^o_{ij}, o inversamente que si se consigue una matriz de coeficientes fácilmente calculable no lo sean los términos de causa o independientes.

Además hay que recordar que para una buena resolución, debe tratarse que la deformación del sistema fundamental bajo la causa que se considere sea muy semejante a la del sistema hiperestático. De esto puede resultar que el sistema fundamental que mejor cumple esta condición, no tenga una matriz de coeficientes con diagonal dominante, lo que dificulta la resolución. También puede haber que considerar dos o tres estados de carga diferentes, para los que el fundamental más conveniente no sea el mismo.

Para superar estos inconvenientes, se puede recurrir a la llamada "teoría de los grupos de fuerzas" o "teoría de las incógnitas agrupadas", que en definitiva consiste en realizar combinaciones lineales con las incógnitas para mejorar la matriz de coeficientes.

Nos referiremos a esta teoría y a las posibilidades de ser empleada en la simplificación del cálculo de sistemas hiperestáticos.

II — *GRUPOS INCOGNITOS*

2 — Llamaremos "grupo incógnito" al conjunto de $\underline{n}$ valores arbitrarios atribuidos a las $\underline{n}$ incógnitas elegidas para resolver el sistema hiperestático. Así será:

$$\text{Grupo } \dot{I}: X_1^{\dot{I}};\ X_2^{\dot{I}}; \ldots X_n^{\dot{I}}. \qquad [3]$$

$$\text{Grupo } \dot{J}: X_1^{\dot{J}};\ X_2^{\dot{J}}; \ldots X_n^{\dot{J}}.$$

Tomando $\underline{n}$ grupos incógnitos, en un sistema con igual número de incógnitas, se podrá establecer que:

$$\left[\begin{array}{l} X_1 = X_1^I X_1 + X_1^{II} \cdot X_{II} + X_1^{III} \cdot X_{III} + \ldots + X_1^N \cdot X^N . \\ X_2 = X_2^I \cdot X_I + X_2^{II} \cdot X_{II} + X_2^{III} \cdot X_{III} + \ldots + X_2^N \cdot X_N . \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = X_n^I \cdot X_1 + X_n^{II} \cdot X_{II} + X_n^{III} \cdot X_{III} + \ldots + X_n^N \cdot X_N . \end{array}\right. \qquad [4]$$

Lo que equivale a expresar que la superposición de los $\underline{n}$ grupos incógnitos afectados cada uno de ellos por valores $X_I, X_{II} \ldots X_N \ldots$, incógnitos a su vez, y que llamaremos "nuevas incógnitas", son equivalentes a las $\underline{n}$ incógnitas X_i y logran por lo tanto cumplir las mismas condiciones que éstas o sea las [1]. Las [4] permiten, conocidas las $n\, X_i (i = 1 \ldots n)$ calcular las $n\, X_I (I = 1 \ldots N)$ por resolución del sistema, o conocidas éstas, calcular las $n\, X_i$.

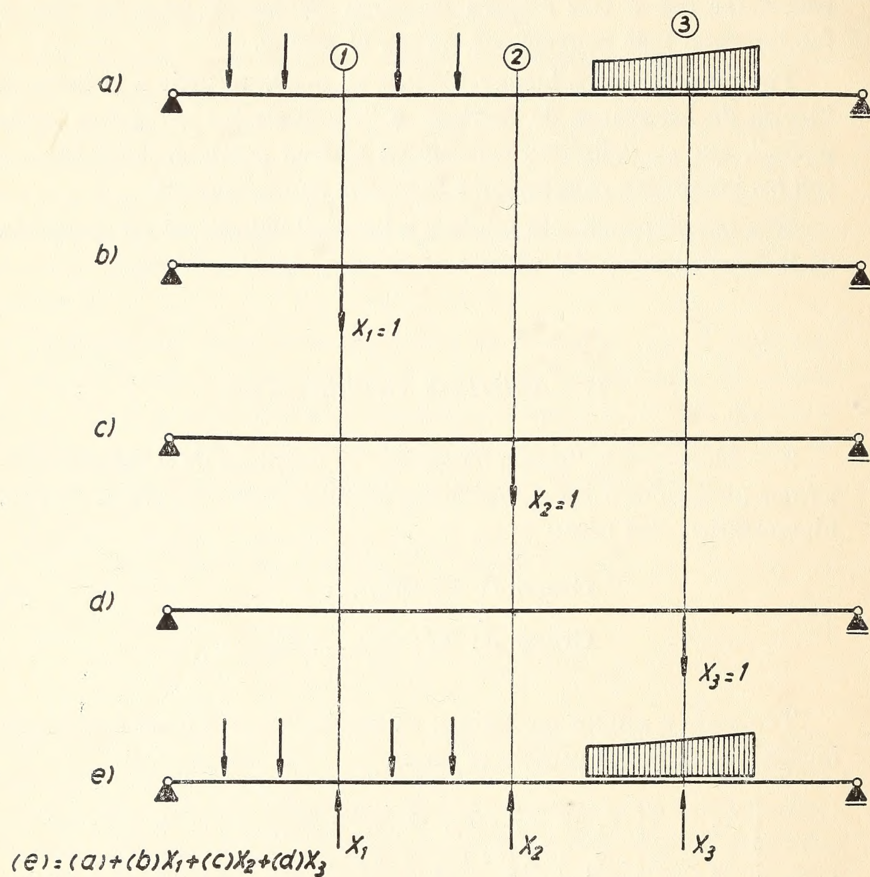


FIGURA 1 (*a*)

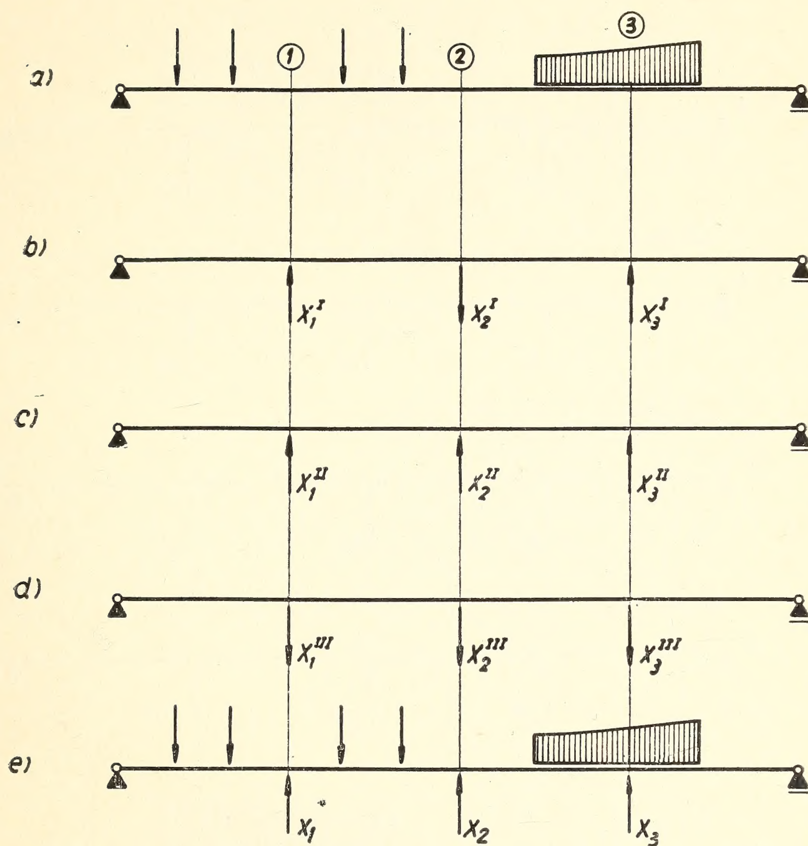

a)
b)
c)
d)
e)
1
2
3
X_1^I
X_2^I
X_3^I
X_1^{II}
X_2^{II}
X_3^{II}
X_1^{III}
X_2^{III}
X_3^{III}
X_1
X_2
X_3
$(e) = (a) + (b) X_I + (c) X_{II} + (d) X_{III}$

FIGURA 1 (b)

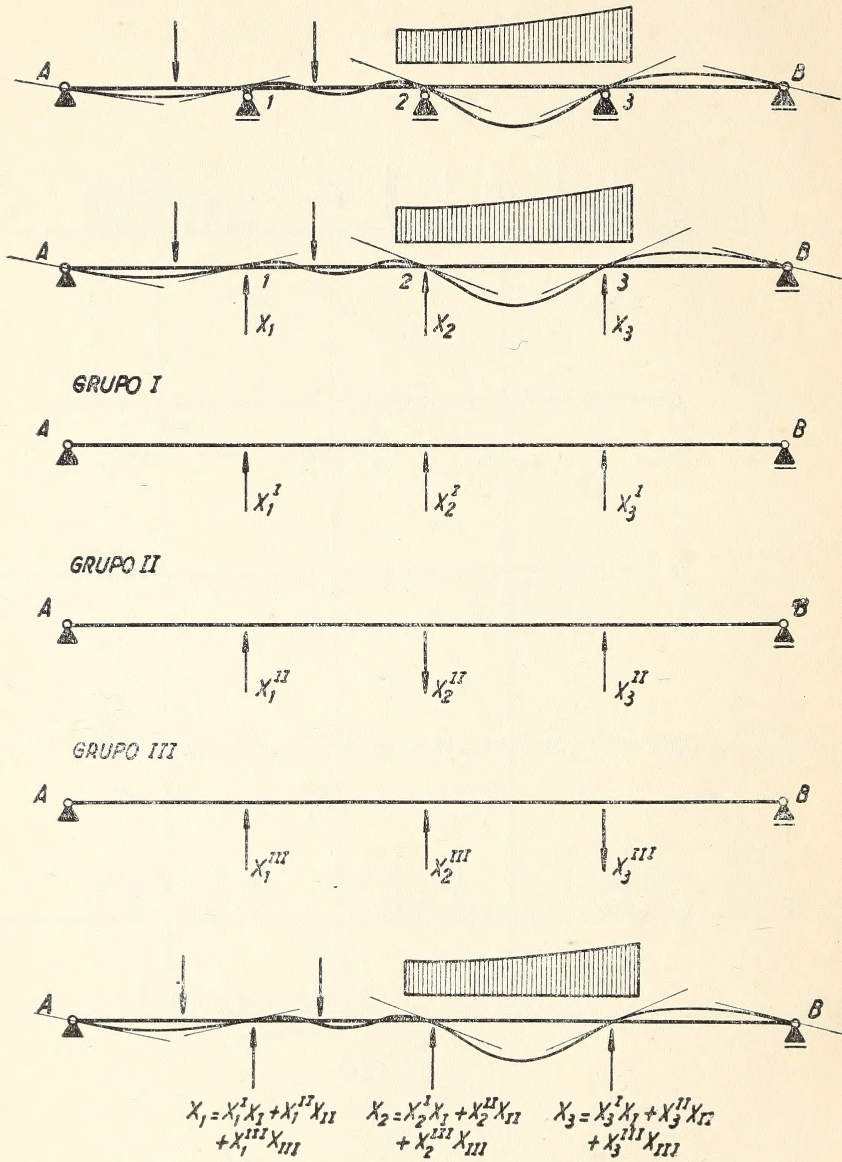

A
B
1
2
3
X1
X2
X3
GRUPO I
GRUPO II
GRUPO III
X1 = X1^I XI + X1^II XII + X1^III XIII
X2 = X2^I XI + X2^II XII + X2^III XIII
X3 = X3^I XI + X3^II XII + X3^III XIII

FIGURA 1 (c)

Si escribiéramos por simple superposición de efectos el cumplimiento de las [1] mediante la acción de los grupos incógnitos afectados por las nuevas incógnitas, tendríamos, como es inmediato:

$$e_i^o + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{ij}^o \cdot X_j^I\right) \cdot X_I + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{ij}^o \cdot X_j^{II}\right) \cdot X_{II} + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_i^o \cdot X_j^N\right) \cdot X_N = 0.$$

$$e_2^o + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{2j}^o X_j^I\right) \cdot X_I + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{ej}^o \cdot X_j^{II}\right) \cdot X_{II} + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{2j}^o \cdot X_j^N\right) \cdot X_N = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [5$$

$$e_n^o + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{nj}^o \cdot X_j^I\right) \cdot X + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{nj}^o \cdot X_j^{II}\right) \cdot X_{II} + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{nj}^o \cdot X_j^N\right) \cdot X_N = 0.$$

Llamando a los términos entre paréntesis:

$$\left(\sum_{j=1}^{j=n} e_{ij}^o \cdot X_i^I\right) = e_{i,I}^o$$

$$\left\{\begin{matrix} i = 1 \ldots n \\ j = 1 \ldots n \\ I = 1 \ldots N \end{matrix}\right\} \qquad [6]$$

las [5] pueden escribirse:

$$\left\{\begin{array}{l} e_1^o + e_{1,I}^o \cdot X_I + e_{1,II}^o \cdot X_{II} + \ldots + e_{1,N}^o \cdot X_N = 0. \\ e_2^o + e_{2,I}^o \cdot X_I + e_{2,II}^o \cdot X_{II} + \ldots + e_{2,N}^o \cdot X_N = 0. \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n^o + e_{n,I}^o \cdot X_I + e_{nII}^o \cdot X_{II} + \ldots + e_{n,N}^o \cdot X_N = 0. \end{array}\right. \qquad [7]$$

que expresan exactamente la misma anulación de efectos correspondientes con las X_i cuando sobre el sistema fundamental actúan las causas deformantes y las n X_i, salvo que aquí lo expresan en función de la actuación de los N grupos incógnitos afectados por las N nuevas incógnitas. La figura 2 ilustra lo expuesto para la primera ecuación y en el caso del mismo sistema de figura 1.

De las [4] se deduce de inmediato que no pueden ser nulos todos los valores $X_i^J (J = I \ldots N)$ pues ello implicaría imponer de antemano la condición $Xi = 0$.

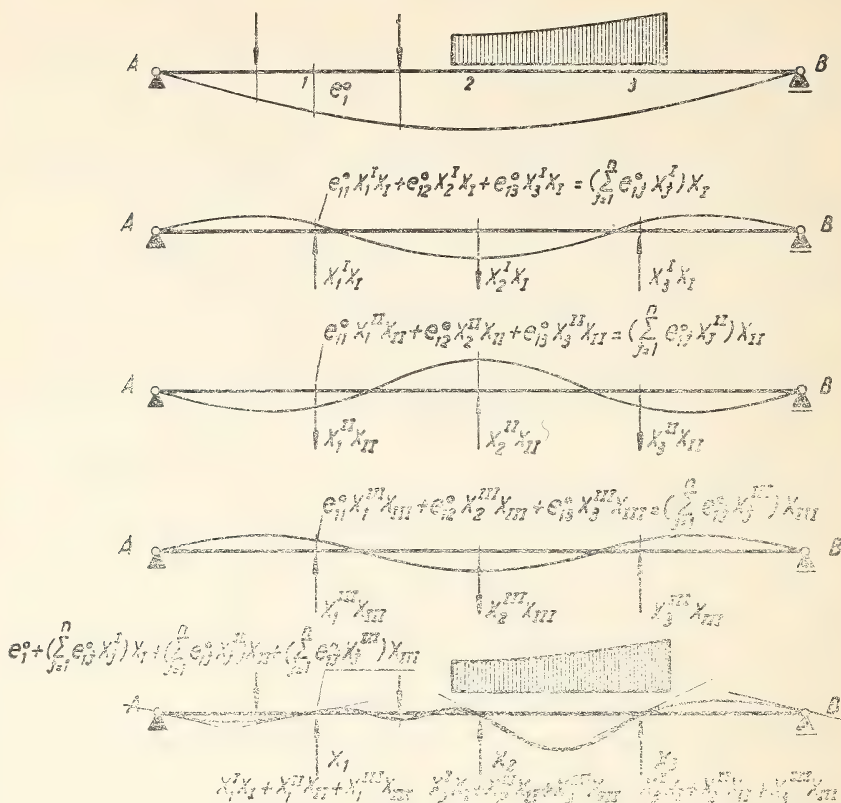


FIGURA 2

Además los grupos incógnitos deberán ser $N = n$, o sea tantos como incógnitas Xi, para poder escribir las [4] en forma determinada.

Si fuera posible obtener un grupo por combinación lineal de otros, tampoco estaría correctamente planteado el problema, pues esto equivaldría a tener $N' < n$ grupos incógnitos y valdría la misma observación anterior.

3 — Los coeficientes de la matriz del sistema de ecuaciones [7] se calculan con expresiones del tipo de la [2]; o sea:

$$e^o_{i,j} = \int \overline{M}_i \cdot \overline{M}_J \frac{ds}{EJ} + \int \overline{N}_i \cdot \overline{N}_J \frac{ds}{EF} \cdot$$

En las que:

$\overline{N}_i$ y $\overline{M}_i$ tienen los significados conocidos y $\overline{N}_J$ y $\overline{M}_J$ son las funciones fuerza normal y momento flexor debidas al grupo incógnito X_j, o sea a los valores $X^j_1, X^j_2, \ldots X^j_n$ preestablecidos, actuando conjuntamente sobre el sistema fundamental.

Es entonces inmediato que $e^o_{iJ} \neq e_{jI}$ y por lo tanto que el sistema de ecuaciones [7] no será simétrico respecto de la diagonal princi-

pal, como lo era el [1]. De todos modos, puede plantearse un sistema de ecuaciones simétrico recurriendo al teorema de reciprocidad.

Entre el estado:

$$Cp;\ \left(\sum_{J=1}^{J=N} X_i^J \cdot X_j\right)_{i=1}^{i=n} \qquad [9]$$

y sucesivamente cada uno de los siguientes:

$$\left[X_i^j (i = 1 \ldots n)\right]_{J=1}^{J=N} \qquad [10]$$

cuyo trabajo será nulo en la deformación producida por el [9], por ser nulos los efectos correspondientes con las incógnitas, dado que se reproduce la situación del sistema que se desea resolver, (figura 3).

Llamando e_I^o al trabajo que realizan las cargas en la deformación producida por el grupo $\dot{I}$; e_{JI}^o al trabajo que realiza el grupo $\dot{J}$ en la

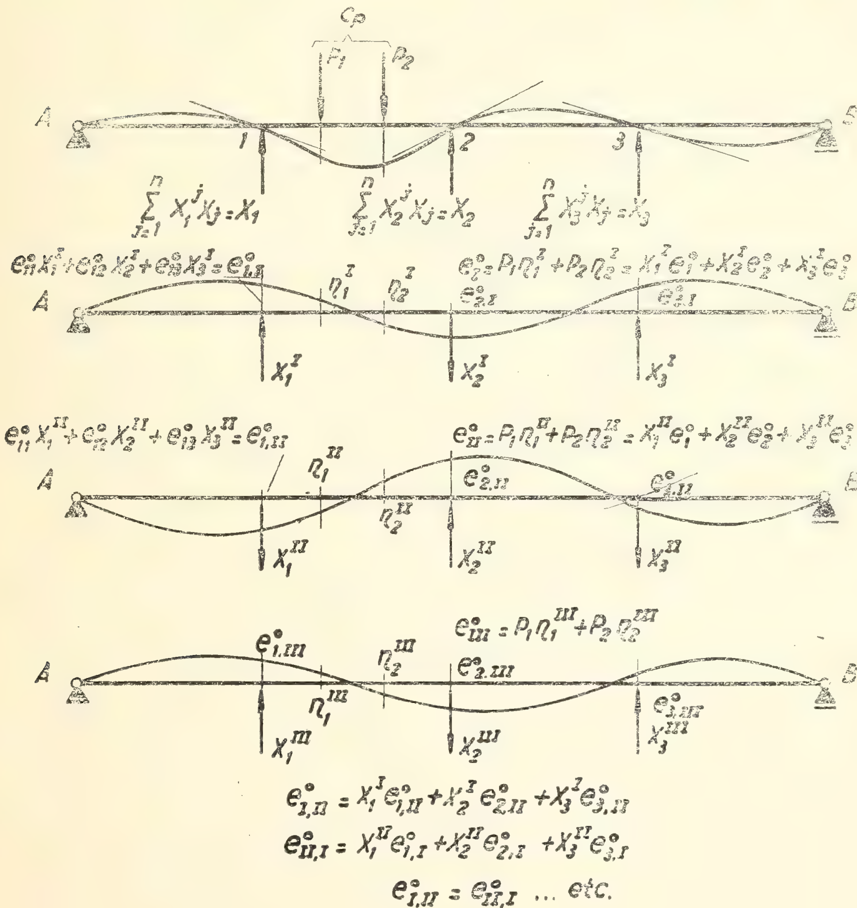


FIGURA 3

deformación producida por el grupo $\dot I$, etc., puede escribirse de inmediato:

$$\left[e^o_{\dot I} + \sum_{J=1}^{J=N} e^o_{J,\dot I} \cdot X_J = 0 \right]_{\dot I=1}^{\dot I=N} \qquad [11]$$

Los subíndices aparecen invertidos, como cuando se plantea el sistema [1] usando el teorema de reciprocidad.

En todo caso el sistema [11] equivale al [7] y al [1] y además es simétrico respecto de la diagonal principal, pues el mismo teorema de reciprocidad establece que $e^o_{\dot I,J} = e^o_{J,\dot I}$.

Los términos independientes y los coeficientes se calcularán con expresiones del tipo de las [2], o sea:

$$e^o_{\dot I} = \int M_c \overline{M}_{\dot I} \frac{ds}{EJ} + \int N_c \overline{N}_{\dot I} \frac{ds}{EF} .$$

$$e^o_{\dot I,J} = e^o_{1,J} \cdot X^{\dot I}_1 + e^o_{2,J} \cdot X^{\dot I}_2 + \dots + e^o_{n,J} \cdot X^{\dot I}_n =$$

$$= X^{\dot I}_1 \cdot \left(\int \overline{M}_1 \overline{M}_J \frac{ds}{EJ} + \int \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_J \frac{ds}{EF} \right) + \dots +$$

$$+ X^{\dot I}_n \cdot \left(\int \overline{M}_n \cdot \overline{M}_J \frac{ds}{EJ} + \int \overline{N}_n \cdot \overline{N}_J \frac{ds}{EF} \right)$$

$$= \int \overline{M}_J \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_i X^{\dot I}_i \frac{ds}{EJ} + \int \overline{N}_J \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \overline{N}_i \cdot X^{\dot I}_i \frac{ds}{EF} =$$

$$= \int \overline{M}_J \cdot \overline{M}_{\dot I} \frac{ds}{EJ} + \int \overline{N}_J \cdot \overline{N}_{\dot I} \frac{ds}{EF} .$$

Siendo $\overline{M}_{\dot I}$, $\overline{N}_{\dot I}$, $\overline{M}_J$, $\overline{N}_J$, los diagramas que representan las funciones momento flexor y fuerza normal producida por los grupos incógnitos I y J.

Intercalamos un primer ejemplo numérico que servirá para fijar ideas.

EJEMPLO N° 1

El esquema a resolver, el fundamental elegido y el diagrama de momentos debido a las cargas externas en el fundamental son los de la figura 4

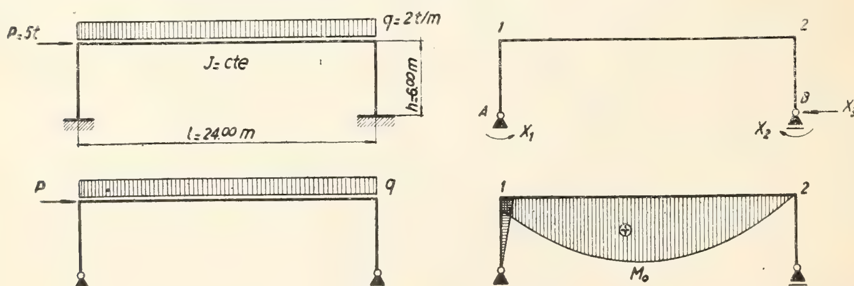


FIGURA 4

$$M^{\circ}(\text{máx. } q) = q \frac{l^2}{8} = 2 \frac{24^2}{8} = 144 \text{ tm.}$$

$$M_{0,1} = 30 \text{ tm.}$$

Tomaremos los siguientes grupos incógnitos:

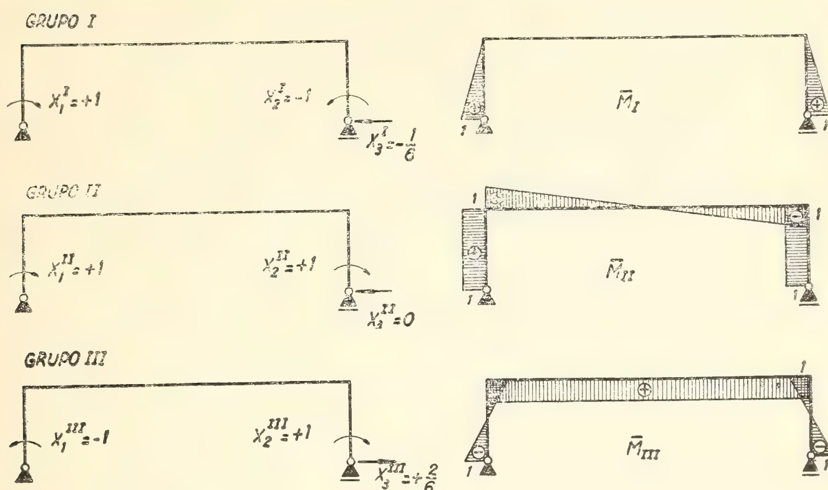


FIGURA 5

Con los diagramas $\overline{M}_I (I = I, II, III)$ calculamos con [12] los coeficientes y términos independientes del sistema de ecuaciones [11] entre las nuevas incógnitas.

La matriz de coeficientes y los términos de carga serán pues:

	X_I	X_{II}	X_{III}	e^o_I
I	4	0	—2	30
II	0	20	0	210
III	—2	0	28	2784

Resuelto el sistema de ecuaciones, se obtienen:

$$X_I = -\ 59{,}30.$$
$$X_{II} = -\ 10{,}50.$$
$$X_{III} = -\ 103{,}50.$$

Construcción del diagrama final de momentos lexores;

Con X_I X_{II}, X_{III}, y las cargas actuando sobre el fundamental, por superposición tendremos $M = M^o + \sum_i \overline{M}^o_I \cdot X_I$; o sea en cada sección:

$$M_A = X_1^I \cdot X_I + X_I^{II} \cdot X_{II} + X_1^{III} \cdot X_{III} = 1 \cdot (-59{,}30) + $$
$$+ 1 \cdot (-10{,}50)\ 1 \cdot (-103{,}50) = + 33{,}70 \text{ tm.}$$

$$M_1 = M_1^o + \sum_i \overline{M}_{1I} X_I = 30 + 0 \cdot X_I + 1 \cdot (-10{,}50) + 1 \cdot (-103{,}50) =$$
$$= -84 \text{ tm.}$$

$$M_2 = M + {}^o_2\sum_i \overline{M}_{2I} X_I = -1 \cdot (-10{,}50) + 1 \cdot (-103{,}50) = -93 \text{ tm}$$

$$M_B = M_B^o + \sum_i \overline{M}_{BI} \cdot X_I = 1 \cdot (-59{,}30) - 1 \cdot (-10{,}50) -$$
$$- 1 \cdot (-103{,}50) = + 54{,}70 \text{ tm.}$$

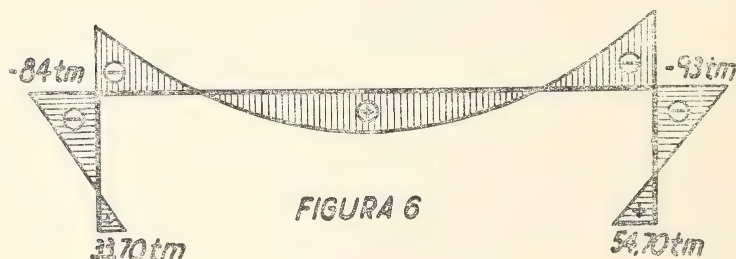


FIGURA 6

Como control realizaremos la resolución, como es corriente, tomando las incógnitas comunes X_1, X_2, X_3.

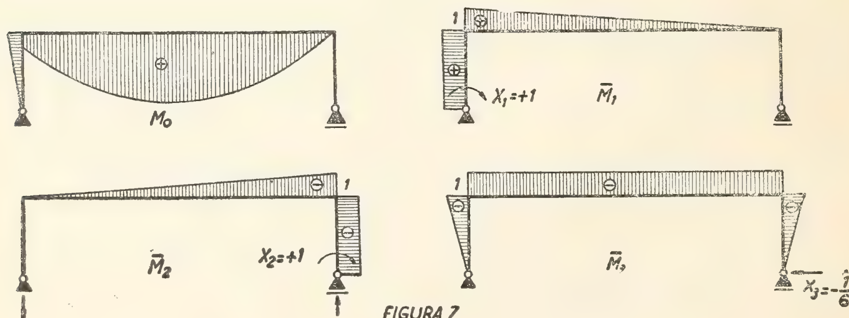


FIGURA 7

El sistema de ecuaciones de congruencia, a resolver, es:

$$14\,X_1 - 4\,X_2 - 15\,X_3 + 1482 = 0$$
$$-4\,X_1 + 14\,X_2 + 15\,X_3 - 1272 = 0$$
$$-15\,X_1 + 15\,X_2 + 28\,X_3 - 2724 = 0$$

Resueltas se obtienen: $X_1 = 33{,}15$; $X_2 = -54$; $X_3 = 144{,}10$.

Superponiendo, en el fundamental, la acción de las cargas X_1, X_2 y X_3, resulta:

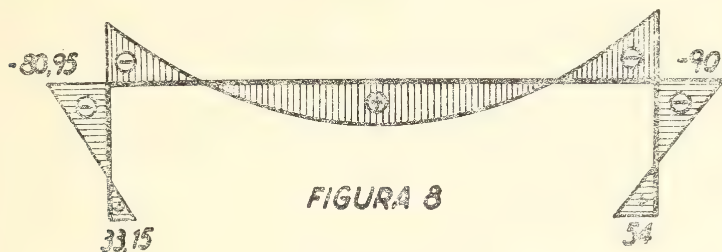


FIGURA 8

4 — Lo expuesto en el párrafo 3 es la antigua teoría de los grupos de fuerzas (Gruppenlasten), cuyos orígenes datan del año 1880 en trabajos de Krohn y Mohr. No es de uso frecuente en nuestro ambiente, lo que justifica su repetición aquí, realizando brevemente su planteo, en forma tal vez no totalmente ortodoxa.

Nada obsta para que todo lo expuesto se aplique en el caso de incógnitas elásticas, con lo que se tendría la "teoría de los grupos de deformaciones".

Por ello hemos preferido utilizar la designación genérica de grupos incógnitos (estáticos elásticos o mixtos).

La "teoría de los grupos incógnitos" al ser *otra forma* de plantear las ecuaciones de resolución de hiperestáticos, permite resolver algunos problemas formales, interesantes desde el punto de vista de la resolución de dichas ecuaciones.

Por ejemplo, obteniendo sistemas en que las funciones $\overline{M}_i$ ($i = 1 \ldots N$) sean ortogonales entre sí, con lo que el sistema de ecuaciones se reduce a un conjunto de N ecuaciones independientes, cada una de ellas con una sola incógnita.

5 — No plantearemos aquí en forma extensa el problema, pues puede verse en alguna de las obras indicadas en la bibliografía que se agrega. Solamente esbozaremos que si en un sistema de $\underline{n}$ incógnitas formamos N grupos de las siguientes composiciones: (se emplea la nomenclatura corriente al resolver el Algoritmo de Gauss):

[13]

INCOGNITA	X_1	X_2	X_3	....	X_n
GRUPO I	$X_1^I = 1$	$X_2^I = 0$	$X_3^I = 0$	....	$X_n^I = 0$
GRUPO II	$X_1^{II} = X_{12}^{(1)}$	$X_2^{II} = 1$	$X_3^{II} = 0$	......	$X_n^{II} = 0$
GRUPO III	$X_1^{III} = X_{13}^{(2)}$	$X_2^{III} X = _{23}^{(2)}$	$X_3^{III} = 1$	......	$X_n^{III} = 0$
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	....
.	.	.	.	....	....
GRUPO N	$X_1^N = X_{1n}^{(n-1)}$	$X_2^N = X_{2n}^{(n-1)}$	$X_3^N = X_3^{(n-1)}$	....	$X_n^N = 1$

Será inmediato que:

$$e^o_{I,II} = 0; \quad e^o_{I,III} = 0 \ldots; \quad e^o_{IN} = 0. \qquad [14]$$
$$e^o_{II,III} = 0 \ldots; \quad e^o_{II,N} = 0.$$

y por el teorema de reciprocidad: $e^o_{II,I} = 0$; $e^o_{III,I} = 0$, etc.
Con lo que el sistema [11] se reduce a:

$$\begin{cases} e^o_{I,I} \cdot X_I + e^o_I = 0 \\ e^o_{II,II} \cdot X_{II} + e^o_{II} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^o_{NN} \cdot X_N + e^o_N = 0 \end{cases} \qquad [15]$$

que son $\underline{n} = N$ ecuaciones independientes, cada una de ellas con una sola incógnita.

Estos grupos incógnitos se forman con valores que *resultan del cálculo* y este cálculo insume aproximadamente el mismo trabajo ma-

terial que el necesario para la inversión de la matriz del sistema original.

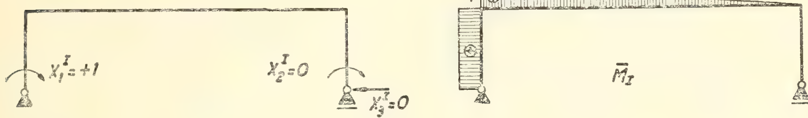
Las componentes de los grupos incógnitos [13] forman lo que en álgebra matricial se denomina una matriz de ortogonalización, pues cumplen las condiciones de ortogonalidad:

$$e^{o}_{\dot{I},\dot{J}} = 0 \qquad (\dot{I} \neq \dot{J}) \tag{16}$$

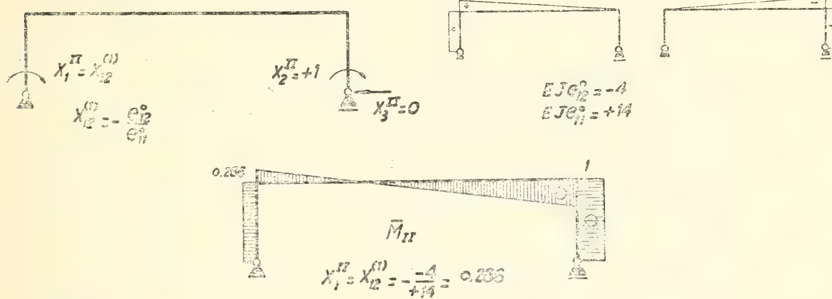
EJEMPLO N° 2

Formación de grupos para la separación de incógnitas:

GRUPO I



GRUPO II



GRUPO III

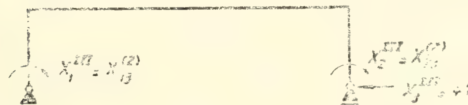


FIGURA 9

Con:

$$X^{(2)}_{2,3} = -\frac{e^{(1)}_{23}}{e^{(1)}_{22}} = -\frac{e^{o}_{23} + X^{(1)}_{13} \cdot e^{o}_{21}}{e^{o}_{22} + X^{(1)}_{12} \cdot e^{o}_{21}}$$

$$X^{(2)}_{13} = X^{(1)}_{13} + X^{(1)}_{12} \cdot X^{(2)}_{23}$$

Operando, se obtienen:

$$X^{(2)}_{2,3} = X^{III}_{2} = -5{,}05$$
$$X^{(2)}_{1,3} = X^{III}_{1} = +5{,}05$$

Entonces los grupos tienen la siguiente constitución:

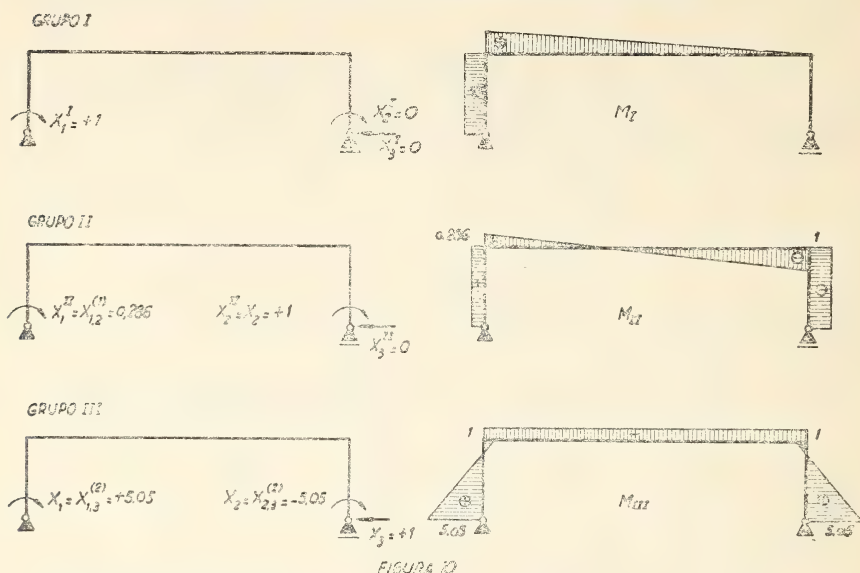


FIGURA 10

Con los diagramas M_c, $\overline{M}_I$, $\overline{M}_{II}$ y $\overline{M}_{III}$ podemos calcular los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones.

La matriz de coeficientes y los términos de carga serán ahora:

	I	*II*	*III*	*C*
I	14	0	0	1482
II	0	12,85	0	—850,70
III	0	0	108	— 2570

Como se trata de tres ecuaciones independientes se obtienen de inmediato:

$$X_I = -\frac{e^o_I}{e^o_{I,I}} = -\frac{1482}{14} = -106.$$

$$X_{II} = -\frac{e^o_{II}}{e^o_{II,II}} = -\frac{-850,70}{12,85} = +66,50.$$

$$X_{III} = -\frac{e^o_{III}}{e^o_{III,III}} = -\frac{-2570}{108} = +23,80.$$

Con los valores de las X_i, por superposición, obtenemos el diagrama final de momentos:

$$M = M_0 + \sum_i \overline{M}_i X_i$$

$$M_A = 1 \cdot (-106) + 0{,}286(+66{,}50) + 5 \cdot (+23{,}80) =$$
$$= -106 + 19{,}60 + 120 = 33{,}00 \text{ tm.}$$
$$M_1 = +30 + (-106) + 0{,}286(66{,}50) - 1(23{,}80) =$$
$$= +30 - 106 + 19 - 23{,}80 = -80{,}80 \text{ tm.}$$
$$M_2 = -1(66{,}50) - 1(23{,}80) = -90{,}30 \text{ tm.}$$
$$M_B = -1(66{,}50) + 5(23{,}80) = 66{,}50 + 120 = +53{,}50 \text{ tm.}$$

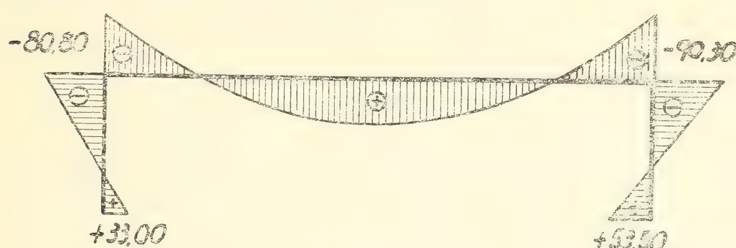


FIGURA 11

Compárese con los diagramas obtenidos en el primer ejemplo.

6 — Por lo dicho en el párrafo 5, ilustrado por el ejemplo N° 2, se ve que puede reducirse el sistema de ecuaciones a un conjunto de ecuaciones de una sola incógnita, independientes entre sí. Pero esto se obtiene mediante un cálculo bastante laborioso. Haciendo uso de las analogías conocidas, como del "Centro elástico", de la "columna análoga" y del "triángulo autopolar", auxiliándose con algunos cálculos, en los sistemas de hasta tres incógnitas puede conseguirse la separación de las mismas.

Cada uno de dichos artificios puede interpretarse mediante grupos de incógnitas, los que a la vez permiten, como se vio, extender la separación de incógnitas para el caso de ser su número mayor que tres.

Queda siempre el recurso de plantear *sin cálculo* grupos que cumplan aproximadamente las condiciones de ortogonalidad. En los sistemas aporticados es bastante simple conseguir algo en este sentido, por inspección de los diagramas de momentos $\overline{M}_i (i = 1, \ldots n)$ tendiendo a evitar zonas comunes en cada dos de ellos con lo que $e^o_{ij} = \int \overline{M}_i \overline{M}_j \frac{ds}{EJ} = 0$, ó tratando de que en las zonas comunes, a

cada diagrama simétrico le corresponda uno antimétrico, con lo que la integral vuelve a ser nula y se cumple la misma condición de ortogonalidad aunque no para todos los términos $e^o_{i,j}$

Lo que se quiere significar en este párrafo es que se puede proceder por tanteos, guiándose por la práctica en la resolución de hiperestáticos, para formar grupos que no se influyan entre sí. En cuanto aparece una situación especial como la simetría o la antimetría de forma y/o carga es muy simple organizar grupos de este tipo, sin cálculo previo de los valores componentes. Véanse a este respecto las obras citadas de Kurt Beyer y de Robert et Musette.

Lo expuesto en este capítulo, vale tanto para incógnitas estáticas como elásticas o mixtas.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO II

K. Beyer: "Estática del hormigón armado"; tomo I, pág. 323 y siguientes.

E. Melan: "Introducción a la estática de las construcciones"; pág. 179 y siguientes.

E. Robert et L. Musette: "Le calcul des systemes hyperstatiques"; pág. 98 y siguientes.

A. J. Bignoli: "Apuntes sobre teoría de los grupos"; C.E.I.L.P., 1950.

A. Moreira da Rocha: "Unificação das equações e metodo...". IIIas. Jornadas de Engenharia Estrutural. Porto Alegre, Brasil, 1952.

Los primeros trabajos sobre la teoría de los grupos, datan de 1880 y 1881 y se deben a Krohn y Mohr.

III — *INCOGNITAS ESTATICAS — GRUPOS DE CAMBIO DEL SISTEMA FUNDAMENTAL*

7 — Supongamos dos fundamentales isostáticos diferentes, de un mismo sistema hiperestático. Sean X_1, X_2, ... X_n las $\underline{n}$ incógnitas que corresponden al primer fundamental isostático (llamémosle A) y X_α, X_β, X_γ ... X_π las $\underline{n}$ incógnitas que corresponden al segundo fundamental isostático (llamémosle B). Sea P_p el estado de cargas que solicita al hiperestático dado.

Siempre será posible escribir, en el fundamental B, por ejemplo:

$$\left[\begin{array}{l} X^B_{1,Pp} + X^B_{1,\alpha} \cdot X_\alpha + X^B_{1,\beta} \cdot X_\beta + \dots + X^B_{1,\pi} \cdot X_\pi = 0 \\ X^B_{2,Pp} + X^B_{2,\alpha} \cdot X_\alpha + X^B_{2,\beta} \cdot X_\beta + \dots + X^B_{2,\pi} \cdot X_\pi = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X^B_{n,Pp} + X^B_{n,\alpha} \cdot X_\alpha + X^B_{n,\beta} \cdot X_\beta + \dots + X^B_{n,\pi} \cdot X_\pi = 0 \end{array}\right. \quad [17]$$

Siendo:

X^B_{1Pp}: valor de X_1 (incógnita en el fundamental A) debido a las cargas actuando sobre el fundamental B.

$X^B_{1,\alpha}$: valor de X_1 debido a $X_\alpha = +1$ actuando en el fundamental B.

Análoga interpretación tienen los demás valores.

De la resolución del sistema de ecuaciones [17] resultan los n valores X_α, X_β ..., X_π que constituyen un grupo de incógnitas correspondientes al fundamental B que actuando junto con las cargas P_p producen valores nulos de las incógnitas X_1, X_2, ..., X_n correspondientes al fundamental A.

Esto equivale a decir que originan en el fundamental B, junto con la P_p, el mismo estado de solicitación que las cargas P_p actuando solas en el fundamental A.

Si el estado de cargas fuese un valor particular de alguna incógnita $X_i (i = 1 \dots n)$ correspondiente al fundamental A, lo mismo valdría lo expuesto y por lo tanto podría considerarse que dicho valor $X_i (i = 1 \dots n)$ actuando sobre el fundamental A equivale a que actúe sobre el fundamental B un grupo incógnito calculado con ecuaciones del tipo de las [17].

Es decir que *cualquier incógnita estática actuando en cualquier fundamental isostático puede reducirse a un grupo incógnito actuando sobre*

cualquier otro fundamental isostático. Todos, por supuesto, correspondientes a un mismo hiperestático.

Las ecuaciones [17] tomarían en este caso la forma particular, por ejemplo para $X_i^A = +1$:

$$\left.\begin{array}{r} X_{1,\alpha}^B \cdot X_\alpha + X_{1,\beta}^B \cdot X_\beta + \ldots + X_{1,\pi}^B \cdot X_\pi = 0. \\ X_{2,\alpha}^B \cdot X_\alpha + X_{2,\beta}^B \cdot X_\beta + \ldots + X_{2,\pi}^B \cdot X_\pi = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_i^B (X_i^A = +1) + X_{i,\alpha}^B \cdot X_\alpha + X_{i,\beta}^B \cdot X_\beta + \ldots + X_{i,\pi}^B \cdot X_\pi = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n,\alpha}^B \cdot X_\alpha + X_{n,\beta}^B \cdot X_\beta + \ldots + X_{n,\pi}^B \cdot X_\pi = 0. \end{array}\right\} \quad [18]$$

FIGURA 12

No será necesario resolver el sistema [17] ni el [18], sólo interesa saber que cualquier incógnita estática en cualquier fundamental isostático puede ser sustituida por un grupo de incógnitas en cualquier otro fundamental. La única limitación aparte de las propias de formación de grupos incógnitos es la de que el número $\underline{n}$ de incógnitas sea siempre el mismo en cada problema, por ello hemos insistido en que se trata de fundamentales isostáticos de un mismo hiperestático.

Análogamente al establecimiento de las [17] y [18], podrían plantearse expresiones de paso del fundamental A al B, o sea opuestas a las anteriores.

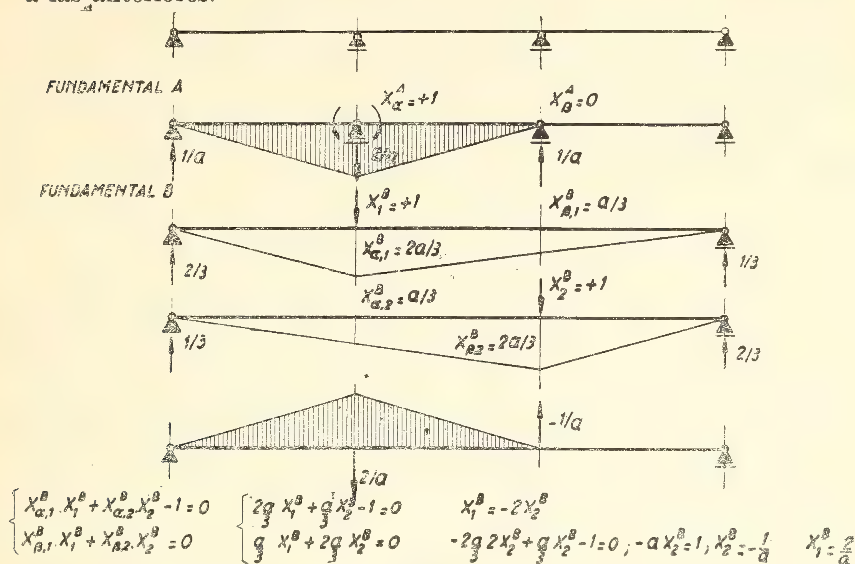


FIGURA 13

Estas serían, como resulta inmediato:

$$\left.\begin{array}{l} X^A_{\alpha,(Pp)} + X^A_{\alpha,1} \cdot X_1 + X^A_{2,\alpha} \cdot X_2 + \ldots + X^A_{\alpha,n} \cdot X_n = 0. \\ X^A_{\beta,(Pp)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + X^A_{\beta,n} \cdot X_n = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^A_{\pi,(Pp)} + X^A_{\alpha,1} \cdot X_1 + X^A_{\alpha,2} \cdot X_2 + \ldots + X^A_{\pi,n} \cdot X_n = 0. \end{array}\right\} [19]$$

$$\left.\begin{array}{r} X^A_{\alpha,1} \cdot X_1 + X^A_{\alpha 2} \cdot X_2 + \ldots + X^A_{\alpha,n} \cdot X_n = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^A_{\delta,(X^B_{\delta=1})} + X^A_{\delta,1} \cdot X_1 + X^A_{\delta,2} \cdot X_2 + \ldots + X^A_{\delta,n} \cdot X_n = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^A_{\pi,1} \cdot X_1 + X^A_{\pi,2} \cdot X_2 + \ldots + X^A_{\pi,n} . X_u = 0. \end{array}\right\} [20]$$

Para mayor ilustración véanse las figuras 12 y 13.

8 — *Conclusión.* Dado que los grupos incógnitos se manejan como incógnitas simples, todo lo expuesto nos lleva a la conclusión de que *podemos tomar las cargas en un fundamental isostático y cada una de las incógnitas en otro diferente,* pues todos los diagramas M y $\overline{M}$ así obtenidos podrían reducirse a un único fundamental, considerando que en lugar de incógnitas simples actúen grupos incógnitos.

Estos grupos incógnitos que llamamos "grupos de cambio de fundamental" *estarán formados por valores particulares de las incógnitas, que no es necesario calcular.* Es decir que desde el punto de vista puramente operativo puede afirmarse que se puede trabajar sobre $n' \geq n + 1$ sistemas fundamentales isostáticos diferentes para resolver un hiperestático con n incógnitas.

Los diagramas finales se obtendrán simplemente por la superposición habitual $M = M_p^o + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i^o X_i$ [21] en la que las X_i serán en rigor nuevas incógnitas y no incógnitas simples.

Interpretada tal cual se ha escrito, la [21] no tendría ningún sentido pues expresaría la superposición de diagramas producidos en diferentes sistemas, pero recordando que en rigor cada una de las X_i en un fundamental diferente equivale a un grupo $X_I^{\cdot}$ y que todos estos grupos $X_I^{\cdot}$ ($\dot{I} = 1 \ldots N$) actúan en el mismo fundamental, todo se ordena y reconcilia con los conceptos clásicos de la hiperestática.

La ventaja de poder tomar cada X_i en un fundamental diferente, es la de elegir para cada X_i el fundamental que sea menos influenciado por las Xj ($j \neq i$) es decir buscar con la variación de fundamentales los diagramas $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$ que menos se interfieran, o sea que den la mayor cantidad posible de valores $e_{ij}^o = 0$ para $i \neq j$, que es el objeto propuesto.

Una aclaración necesaria es la de que, debido a que los diferentes diagramas $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$ se producen en sistemas isostáticos con diferente vinculación a tierra, aunque dichos diagramas coincidan con los correspondientes a un fundamental único, cargado con grupos incógnitos, las deformaciones absolutas no pueden ser superpuestas debido a las diferentes condiciones de vínculo de cada caso. En efecto, las [17], [18], [19], [20] implican condiciones estáticas, pero no de deformación.

En el ejemplo que sigue se ilustra numéricamente la posibilidad de aplicar los "grupos de cambio", a la misma estructura tomada en los ejemplos números 1 y 2.

EJEMPLO N° 3

Tomaremos las cargas y cada una de las Xi en los fundamentales que indica la figura 14.

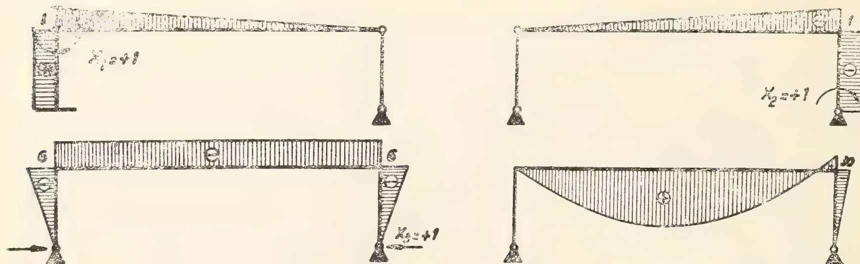


FIGURA 14

Calculados los términos independientes y coeficientes de las incógnitas en la forma habitual, por integración de productos de funciones momento flexor y fuerza normal se tiene el siguiente cuadro de valores:

	1	2	3	C
1	14	—4	—90	1032
2	—4	14	90	—822
3	—90	90	1008	—11304

Resueltas las ecuaciones se obtienen los siguientes valores para las Xi:

$$X_1 = 33{,}50; \quad X_2 = -55; \quad X_3 = 19{,}10.$$

Por superposición de diagramas se obtiene:

$$M = M^{\circ} + \sum_i \overline{M}_i X_i$$

$M_a = 1X1 = 33{,}50$ tm.

$M_1 = 1X1 - 6X3 = 33{,}50 - 6.19{,}10 = -81{,}10$ tm.

$M_2 = -1(-55) - 6(19{,}10) - 30 = -89{,}60$ tm.

$M_b = -1(-55) = 55$ tm.

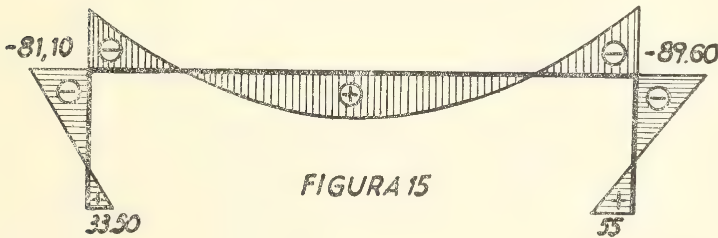


FIGURA 15

Compárese con los diagramas de los ejemplos 1° y 2°.

También puede ser conveniente tomar parte de las cargas en un fundamental y parte en otro, si ello resulta más cómodo.

Por ejemplo:

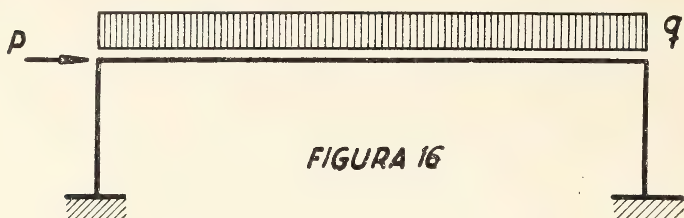


FIGURA 16

Tomamos P en un fundamental A:

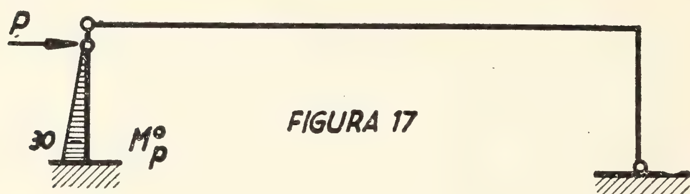


FIGURA 17

y q en un fundamental B:

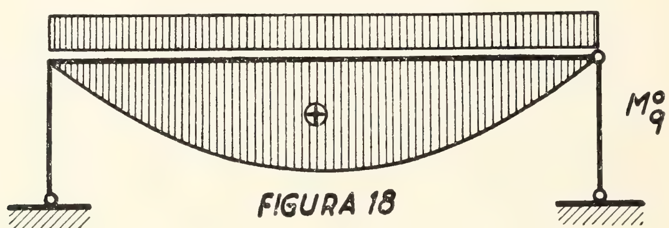


FIGURA 18

Puede operarse con el diagrama de cargas suma de $M^o{}_p$ y $M^o{}_q$ que es más fácil de manejar para los integrales.

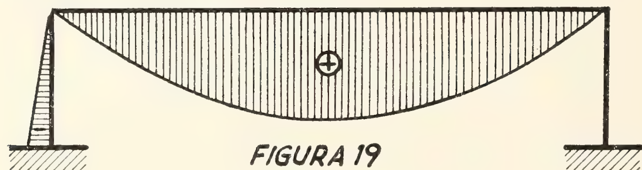
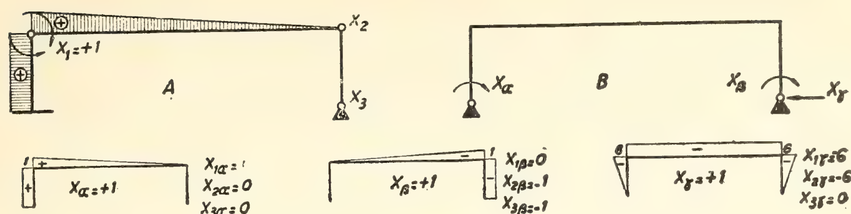


FIGURA 19

Para aclarar ideas, aplicaremos ahora las expresiones [17] y [18], obteniendo los valores correspondientes a los "grupos de cambio", operación completamente ajena a la resolución en sí misma.



$$(X_1 = 1) - 1 + 1 \cdot X_\alpha + 0 \cdot X_\beta - 6 X_\gamma = 0. \quad X_\alpha = +1.$$
$$(X_2 = 0) \ 0 \cdot X_\alpha - 1 \cdot X_\beta - 6 \cdot X_\gamma = 0. \quad X_\gamma = 0.$$
$$(X_3 = 0) \ 0 \cdot X_\alpha - 1 \cdot X_\beta + 0 \cdot X_\gamma = 0. \quad X_\beta = 0.$$

El grupo de cambio que equivale, actuando sobre el sistema B, a la acción de $X_1 = +1$ sobre el sistema A, es pues:

$$X_\alpha = 1 \qquad X_\beta = 0 \qquad X_\gamma = 0$$

Análogamente para X_2:

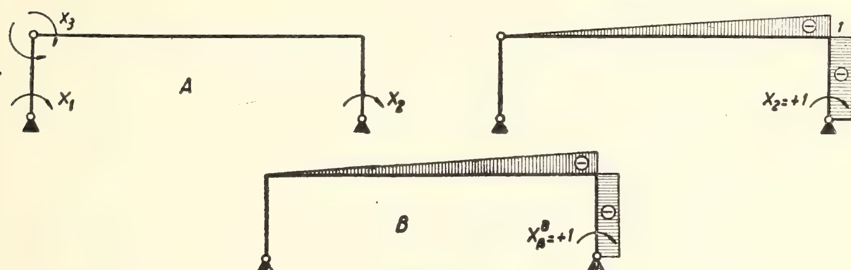


FIGURA 21

$$+1 + 0 \cdot X_\alpha - 1 \cdot X_\beta + 0 \cdot X_\gamma = 0 \ ; X_\beta = +1.$$
$$0 + 1 \cdot X_\alpha + 0 \cdot X_\beta + 0 \cdot X_\gamma = 0 \ ; X_\alpha = 0.$$
$$0 + 1 \cdot X_\alpha + 0 \cdot X_\beta - 6 X_\gamma = 0 \ ; X_\gamma = 0.$$

Para X_3 es directa la relación pues los sistemas fundamentales coinciden:

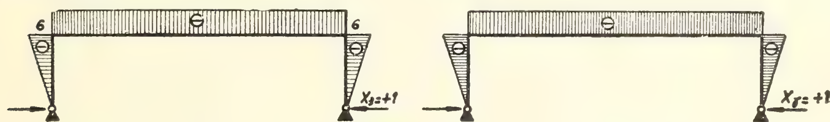


FIGURA 22

Para el estado de cargas:

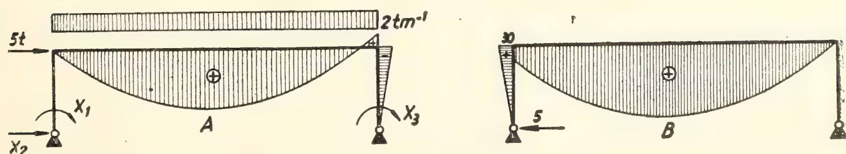


FIGURA 23

$$0 + 1 \cdot X_\alpha + 0 \cdot X_\beta + 0 \cdot X_\gamma = 0 \; ; \; X_\alpha = 0.$$
$$5 + 0 \cdot X_\alpha + 0 \cdot X_\beta - 1 \cdot X_\gamma = 0 \; ; \; X_\gamma = +5.$$
$$0 + 0 \cdot X_\alpha - 1 \cdot X_\beta + 0 \cdot X_\gamma = 0 \; ; \; X_\beta = 0.$$

Entonces tenemos:

FIGURA 24

QUE SON LOS MISMOS DIAGRAMAS OBTENIDOS AL PRINCIPIO DE ESTE EJEMPLO PARA DIFERENTES FUNDAMENTALES.

9 — *Posibilidades prácticas de los "Grupos de Cambio"*. Un poco de agilidad en el manejo de diagramas de solicitaciones puede abrir grandes posibilidades prácticas en la simplificación del cálculo de hiperestáticos, mediante la aplicación de la conclusión que se indicó en 8 ó sea la posibilidad de tomar las cargas en un fundamental isostático y cada una de las X_i en otros diferentes.

En el ejemplo 4° que sigue, se muestra como, mediante una sencilla operación pueden obtenerse en el caso tratado en los ejemplos

anteriores, tres ecuaciones independientes, sin recurrir al cálculo de grupos ortogonales.

EJEMPLO N° 4

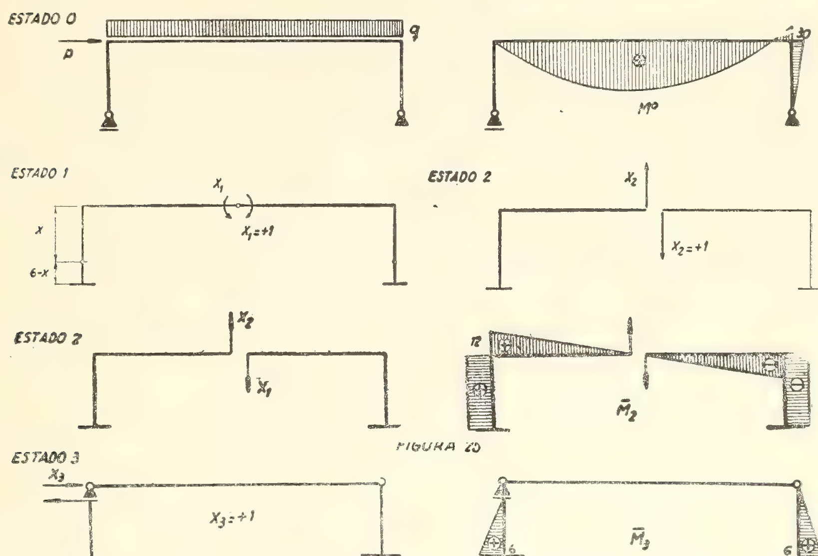


FIGURA 25

Podemos obtener ecuaciones independientes si ubicamos las articulaciones laterales en el esquema 1 en forma tal que se anule la integral del diagrama triangular de los parantes con el correspondiente al Estado 3.

Igualando las integrales: (fig. 26):

$$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot x \cdot x = \frac{1}{6}(6 - x)\left(\frac{6 - x}{x}\right)(x + 12)$$

$$x^3 = 36x - 12x^2 + x^3 + 632 - 144x + 12^2x$$

$$108x = 432; \quad x = \frac{432}{108} = 4; \quad i = 0{,}50$$

Entonces:

$$EJe^o_{11} = 11 \cdot 24 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot (2 \cdot \overline{1}^2 - 2 \cdot 0{,}50 + 2 \cdot \overline{0{,}50}^2) = 27.$$

$$EJe^o_{12} = EJe^o_{13} = 0.$$

$$EJe^o_{22} = 2 \cdot \overline{12}^2 \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot (2 \cdot \overline{12}^2 - 2 \cdot \overline{12}^2 + 2 \cdot \overline{12}^2) = 1.880$$

$$EJe^o_{23} = 0.$$

$$EJe^o_{33} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 144.$$

$$EJe_1^o = -\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1 \cdot 24 + \frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 144 \cdot 1 = 1944.$$

$$EJe_1^o = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot (12 - 2 \cdot 12)(-30) = 1440.$$

$$EJe_3^o = -\frac{1}{6} 3 \cdot 0 \cdot 6 \cdot 6 = -180.$$

$$X_1 = -\frac{1944}{27} = -72.$$

$$X_2 = -\frac{1440}{1880} = -0{,}765.$$

$$X_3 = -\frac{-180}{144} = +1.25.$$

Construcción del diagrama de momentos flexores por superposición:

$M_A = -0{,}50 \cdot (-72) + 12 \cdot (0 \cdot 765) + 6 \cdot (1{,}25) = 36 - 9{,}20 +$
$+ 7{,}50 = +34{,}30$ tm.

$M_1 = 1 \cdot (-72) + 12 \cdot (0.765) = -81{,}20$ tm.

$M_2 = -30 + 1 \cdot (-72) - 12 \cdot (-0.765) = -30 - 72 + 9{,}20 =$
$= -92{,}80$ tm.

$M_B = -0{,}50 \cdot (-72) - 12 \cdot (-0.765) + 6 \cdot (1{,}25) =$
$= 36 + 9{,}20 + 7{,}50 = +72{,}50.$

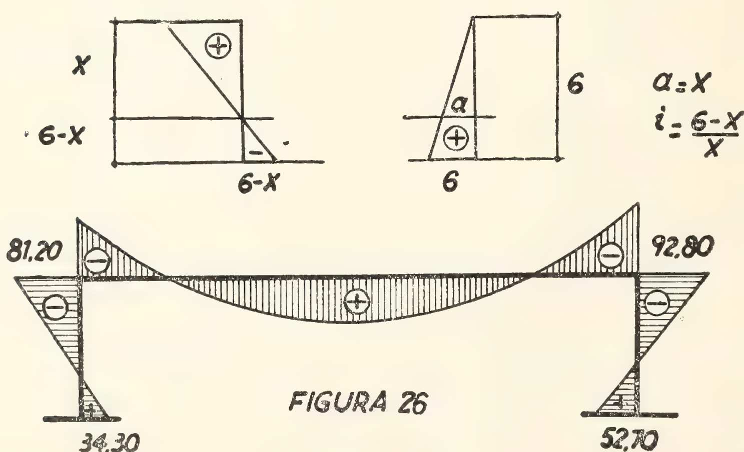


FIGURA 26

Compárese con los diagramas de los ejemplos anteriores.

En una cuaderna cerrada como la de la fig. 27, las condiciones de simetría de forma y carga permiten, sin cálculo, separar las incógnitas.

Siguiendo igual procedimiento pueden obtenerse simplificaciones en otros casos mediante sencillos cálculos adicionales. Otra posibilidad de simplificaciones prácticas resulta de considerar que si, como se vio, un diagrama $\overline{M}$ o $\overline{N}$ de cualquier Xi en un fundamental A puede considerarse como producido por un determinado grupo de incógnitas (grupo de cambio) en otro fundamental B y lo mismo los de otra Xj en un fundamental C puede ser interpretado como debido a otro grupo de incógnitas en el mismo fundamental B, es claro que a los diagramas $\overline{M}$ o $\overline{N}$ que resulten de sumar los producidos por Xi (fundamental A) y Xj (fundamental C) podrán tomarse como debidos a un

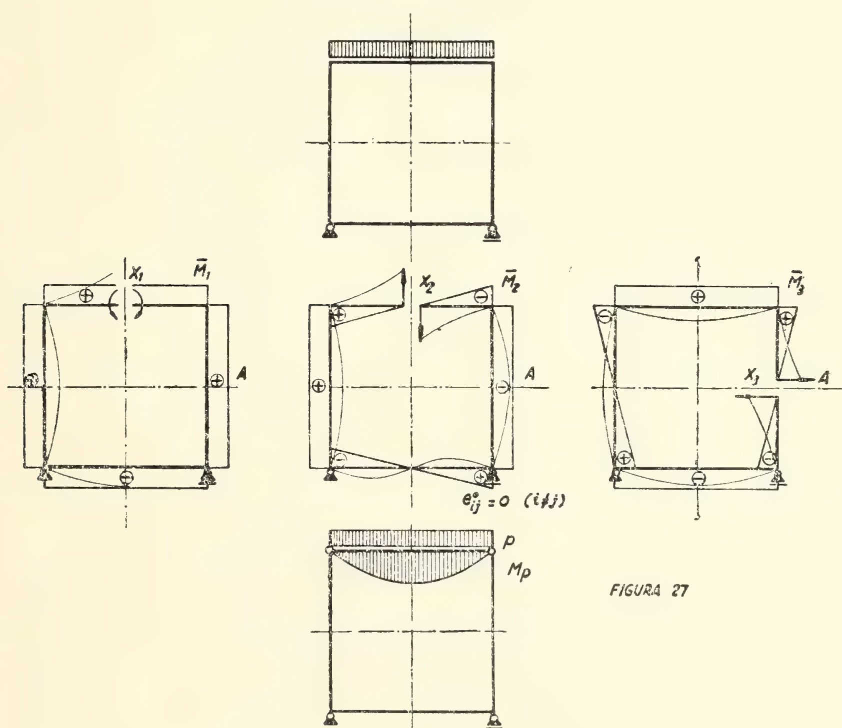


FIGURA 27

grupo en el fundamental B que será suma de los equivalentes a Xi (fundamental A) y Xj (fundamental C).

Cabe pues simplificar agrupando grupos, lo que en la práctica no es más que superponer diagramas de modo a simplificarlos, afectándolos inclusive con factores de proporcionalidad si fuese necesario.

Los casos 1, 2 que siguen pretenden ilustrar y aclarar ideas al respecto.

Caso 1. Pórtico múltiple, hiperestático de 7° grado. Obsérvese en fig. 28 la diferente ublcación de las articulaciones para cada Xi.

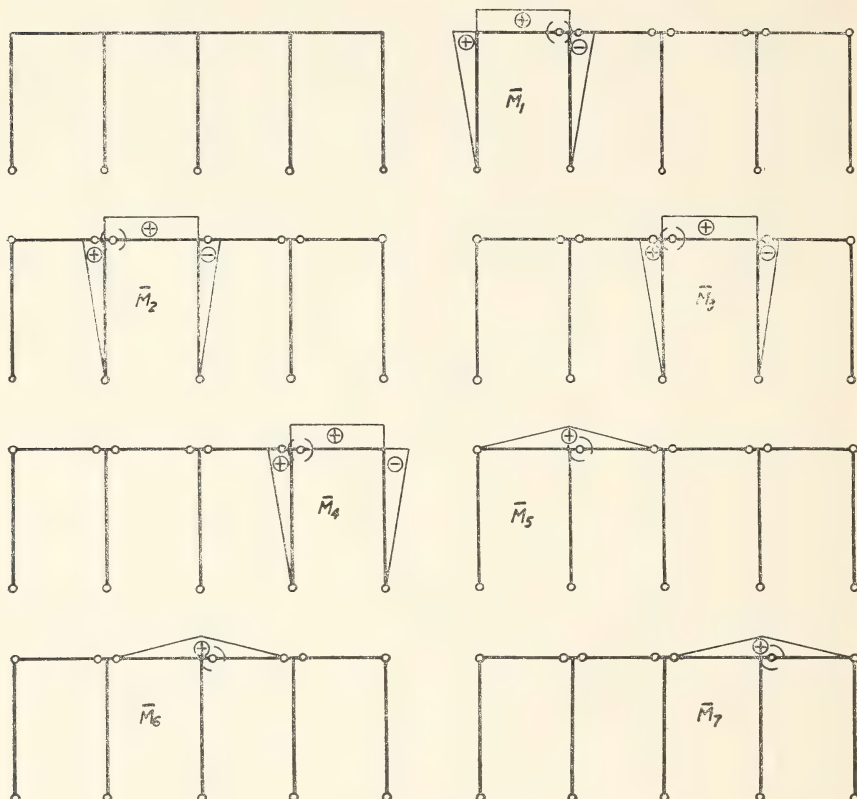


FIGURA 28

Por el método clásico, con un fundamental único (fig. 29), resultaría que como la parte del sistema capaz de resistir las reacciones

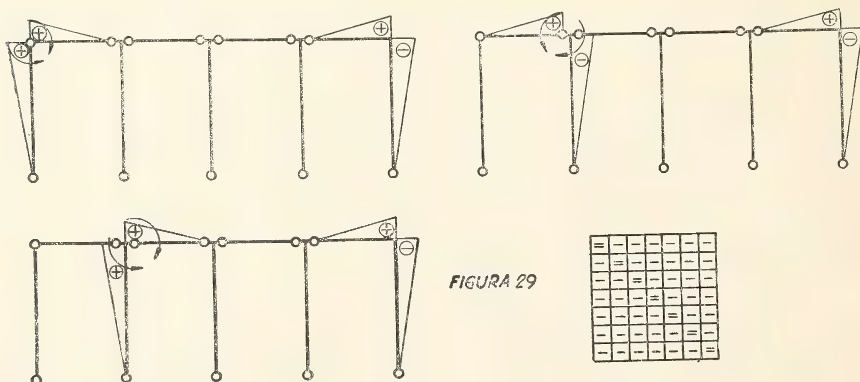


FIGURA 29

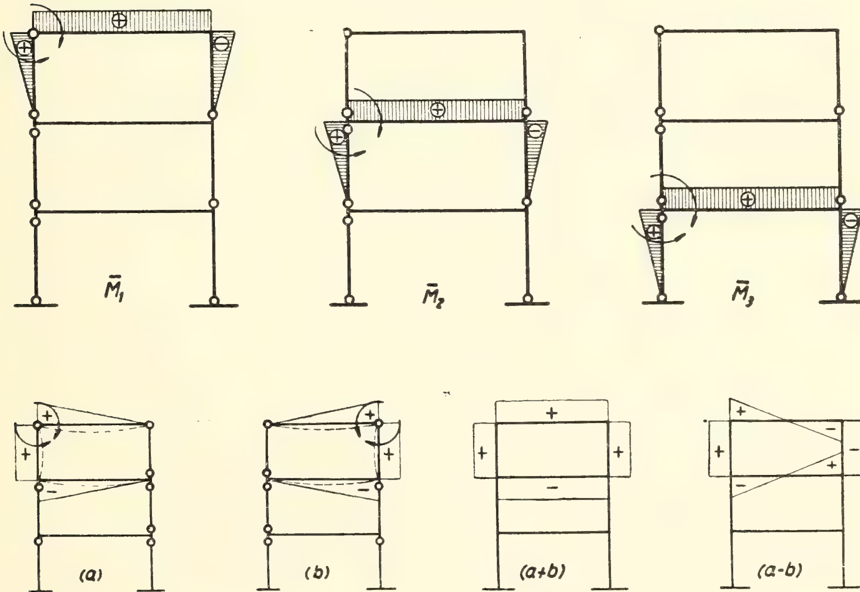
horizontales de los pares es siempre la misma, la matriz resultará totalmente cubierta, o sea completa.

Caso 2. Torre simétrica de tres pisos, con pilares empotrados, hiperestática de 9° grado.

Tomamos $\overline{M}_4$, $\overline{M}_5$ y $\overline{M}_6$ del tipo $(a - b)$ y $\overline{M}_7$, $\overline{M}_8$ y $\overline{M}_9$ del tipo $(a + b)$. Con ello resulta la siguiente matriz:

=	–		–	–		
–	=	–		–	–	
	–	=			–	–
–			=	–		
–	–		–	=	–	
	–	–		–	=	–
		–			–	=

Cargas antimétricas darían diagramas antimétricos con lo que sólo quedarían las X_4, X_5, X_6, anulándose las restantes por la particular disposición de la matriz.



Para cargas simétricas se anularían por análogas razones X_4, X_5, X_6, quedando solamente las otras seis incógnitas X_1, X_2, X_3, X_7, X_8, X_9

Tomando en este segundo caso incógnitas elásticas sólo quedarían tres, vinculándolas por ecuaciones de tres términos, lo que evidentemente sería más conveniente.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO III

A. S. Hall and R. W. Woodhead: "Frame Analysis"; Wiley, 1961. Structural Mechanics in the U.S.S.R. 1917-1957; Ed. by I. M. Rabinovich, Pergamon Press, 1960.

A. Pirard: "Modalités d'application des calculs hyperstatiques". Le genie civil, novembre 1954.

O. Braun: "Vereinfachung bei Ermittlung der Belastungsglieder der Elastizitatzgleichungen"; "Beton und Stahlbetonbau", Januar 1952.

O. Braun: "Neues zur Berechung statisch unbestimmter Tragwerke", Der Stahlbau 1956.

O. Braun: "Examples of simplified computation of the loading terms in the elasticity equations"; Boston Soc. Civ. Eng., 1956.

A. Moreira da Rocha: "Unificação das equações e Metodo das incognitas generalizadas par o cálculo de estruturas hiperestáticas". Memoria de las IIIas Jornadas de Engenharia Estrutural; Porto Alegre, Brasil, 1952.

IV — *CALCULO DE LINEAS DE INFLUENCIA*

1 — En los capítulos anteriores hemos visto que una magnitud estática cualquiera en un sistema hiperestático puede expresarse por superposición en la siguiente forma:

$$M_i = M_i^o + \overline{M}_{i1}^o X_1 + \overline{M}_{i2}^o X_2 + \ldots + \overline{M}_{in}^o X_n \qquad [21]$$

En la que:

$\underline{M_i}$ es una magnitud estática (fuerza) cualquiera que se produce en una sección $\underline{i}$ en el sistema hiperestático.

$M^o i$ la misma magnitud en un isostático A cualquiera.

$\overline{M}_{i,1}^o\ \overline{M}_{i,2}^o \ldots \overline{M}_{i,n}^o$ los valores que toma la misma magnitud M_i debidos a valores unitarios de las incógnitas X_1; X_2; ... X_n. Cada una de estas magnitudes se produce en un sistema isostático diferente.

$X_1 \ldots X_n$ son los valores de las $\underline{n}$ incógnitas (en rigor: "nuevas incógnitas").

La superposición se realiza, pues, aparentemente, en $\underline{n+1}$ sistemas fundamentales diferentes, dado que hemos tomado uno para las cargas y uno diferente para cada incógnita.

Este procedimiento, aparentemente contradictorio, se justifica fácilmente con los "grupos de cambio de fundamental" a que nos referimos antes, para magnitudes estáticas.

Si el estado de cargas fuese una sola carga unitaria actuando en una sección j, la [21] debería escribirse:

$$M_{ij} = M_{ij}^o + \overline{M}_{i1}^o \cdot X_{j1} + \overline{M}_{i2}^o X_{2j} + \ldots + \overline{M}_{in}^o \cdot X_{nj}. \qquad [22]$$

En la expresión [22] los valores M_{ij}; M_{ij}^o X_{1j}; X_{2j}; ... X_{nj} son ordenadas de líneas de influencia, por lo que las escribiremos con la notación más empleada:

$$\eta_{Mi} = \eta_{Mi}^o + \sum_j \overline{M}_{ij}^o \cdot \eta_{Xj} \qquad [23]$$

La línea de influencia de cada una de las incógnitas X_j ($j = 1 \ldots n$) puede expresarse por superposición:

$$\eta_{Xj} = \sum_p \beta_{pj} \cdot \eta^o_{\overline{X}p} \qquad [24]$$

En la que β_{pj} son los elementos de la matriz inversa de la formada por los coeficientes de las incógnitas en el sistema de ecuacione que resuelve el problema hiperestático. Los $\eta^o{}_{\overline{X}p}$ son las elásticas producidas por $\overline{X}_p = +1$ en el sistema fundamental.

La elástica η_{Xj} que convenientemente interpretada es la línea de influencia de X_j puede obtenerse con el diagrama de momentos:

$$M_{Xj} = \sum_p \beta_{pj} \overline{M}^o_p \qquad [25]$$

Tomando en cuenta [24] podremos escribir el segundo sumando de [23] así:

$$\sum_j M^o_{ij} \cdot \eta_{Xj} = \sum_j \overline{M}^o_{ij} \cdot \sum_p \beta_{pj} \cdot \eta^o{}_{\overline{X}p} \qquad [26]$$

La elástica [26] se obtiene a partir del diagrama de momentos:

$$M_{Mi\,(\Sigma X j)} = \sum_j \overline{M}^o_{ij} \cdot \sum_p \beta_{pj} \cdot \overline{M}^o_p \qquad [27]$$

El diagrama $M_{Mi\,(\Sigma Xj)}$ debido a diferentes X_i actuando en diferentes fundamentales puede considerarse como producido por varios grupos incógnitos actuando en un único fundamental. Elegiremos aquel en que sea más simple la obtención de los diagramas η^o. Presumiblemente el más ventajoso será una sucesión de tramos simplemente apoyados.

Puede por lo tanto utilizarse las ventajas del cambio de fundamental para obtener los β_{pj} y los diagramas $\overline{M}^o{}_p$ haciéndolos luego actuar sobre el fundamental en el que resulte más simple la obtención de las elásticas.

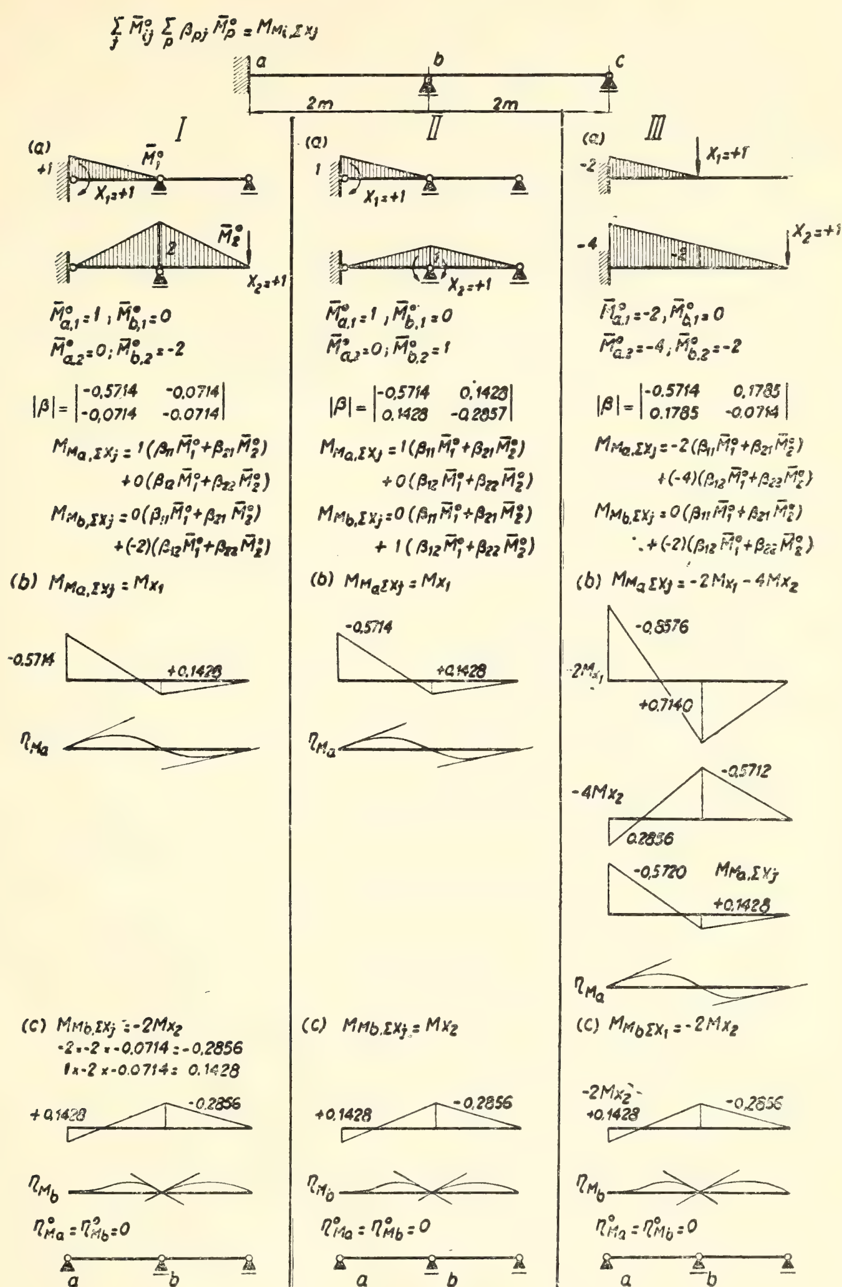
El ejemplo que sigue se refiere al trazado de las líneas de influencia, para cargas verticales, del momento en el empotramiento (a) y sobre el apoyo central (b), en el sistema de figura 32, partiendo de tres resoluciones diferentes.

La primera, con un fundamental diferente para cada una de las dos incógnitas.

La segunda, con un mismo fundamental para ambas incógnitas y éste es a la vez el que más conviene para el trazado de las elásticas por tratarse de tramos simplemente apoyados.

La tercera, con un mismo fundamental para ambas incógnitas, pero éste no es el más conveniente para el trazado de las elásticas por lo que las mismas se trazan en el fundamental de la segunda resolución.

En estos tres ejemplos en la expresión [23] es $\eta^o{}_{Mi} = 0$ por lo que sólo debe calcularse: $\sum_j \overline{M}^o_{ij} \cdot \sum_p \beta_{pj} \cdot \eta^o{}_{\overline{X}p}$.



Las líneas de influencia $\eta^o{}_{Mi} = 0$ resultan nulas, pues tanto en (a) como en (b) se tendría que trazar la línea de influencia de un momento flexor en una articulación.

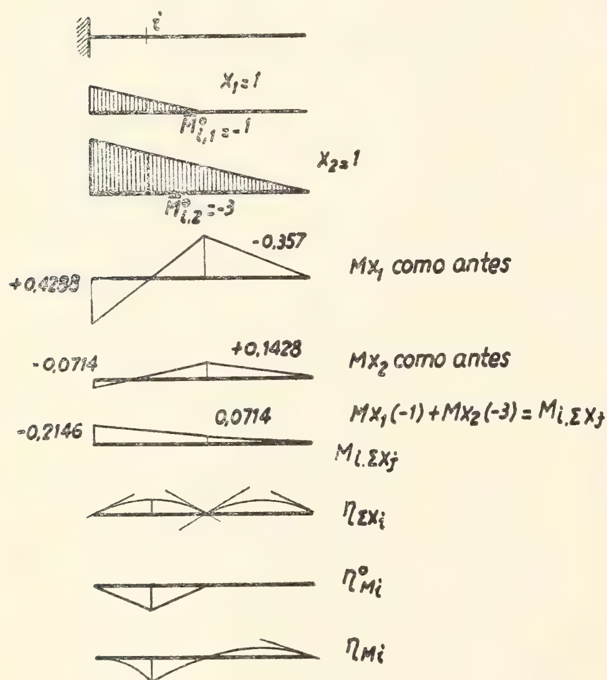
En una *cuarta* aplicación calcularemos con los elementos del tercer ejemplo, la línea de influencia del momento flexor en la sección $\underline{i}$, media del tramo izquierdo.

En este caso no será nula η^o_{Mi}, por lo que debe hacerse la superposición correspondiente.

En cada caso concreto lo expuesto podrá aplicarse para *independizar el trazado de las líneas de influencia de las incógnitas Xi de los diversos fundamentales que se hayan elegido para simplificar el cálculo de las matrices* $|e^o_{ij}|$ y $|\beta_{ij}|$.

Tendiendo a tramos simplemente apoyados y debiendo ser, los diagramas de momentos lineales, el trazado de las elásticas $\eta_{Xj}(j = 1 \ldots n)$ [24] y $\eta_{(\Sigma Xj)}$ se reducirá a emplear elásticas tabuladas para pares unitarios actuando en cada extremo de una viga simplemente apoyada.

IV Se trata de hallar la línea de influencia del momento en la sección i en el ejemplo 3º:



Agradezco a los ingenieros José Ghinassi, Juan Carlos Finck y José Segarra haber calculado los ejemplos numéricos y especialmente el haber leído y discutido los originales de este trabajo.

DEMOSTRACION ELEMENTAL DE LA CONJETURA DE WEIERTRASS

F. R. MARSICANO

I — *INTRODUCCION*

En un curso sobre mecánica celeste dictada por el autor en el seminario Claro C. Dassen de esta sociedad, se expusieron y analizaron las tres fundamentales memorias sobre el problema de los tres cuerpos correspondientes a Lagrange [1], Jacobi [2] y Sundman [3]. En lo que respecta a este último trabajo, hicimos notar que la respuesta afirmativa de Sundman a la conjetura de Weierstrass (expuesta por éste en carta a G. Mittag-Leffler [4] y según la cual, *no pueden existir colisiones triples cuando el momento de la cantidad de movimiento es distinto de cero*) requiere un largo proceso deductivo algebraico y la introducción de varias funciones auxiliares, todo lo cual oscurece el significado físico y no permite ver el juego de las fuerzas que intervienen en el fenómeno; unas oponiéndose a la colisión (fuerzas centrífugas) y otras favoreciéndola (fuerzas newtonianas).

Nuestra demostración intuitiva de la conjetura de Weierstrass hace ver claramente que la relación fuerza centrífuga, fuerza newtoniana tiende a infinito cuando las distancias mutuas tienden a cero y que por lo tanto los tres cuerpos no se pueden acercar simultáneamente más que hasta un cierto límite.

II — *DEMOSTRACION*

Sean, fig. 1, P_0; P_1; P_2; los tres cuerpos de masas respectivamente m_0; m_1; m_2; atraídos con fuerza newtoniana, sean r_0; r_1; r_2 las distancias mutuas; G el baricentro, origen de la terna $\bar{i}\ \bar{j}\ \bar{k}$; $\overline{Kg}$ el

[1] "Essai sur le probléme des trois corps". Oeuvres, t. 6, p. 229.

[2] Véase Agostinelli C.: "Sul problema dei tre corpi". Rendiconti del Sem. Mat. e Fis. di Milano. Vol. XXI 1950, p. 165.

[3] "Memoire Sur le probléme des trois corps". Acta Mat. 36, 1913, p. 105.

[4] "Zur Biographie von Weierstrass". Acta Mat. 35, 1912, p. 29.

vector constante momento de la cantidad de movimiento, de módulo C y sostén del vector $\overline{k}$ de manera que $\overline{Kg} = C\,\overline{k}$.
La expresión general de $\overline{Kg}$ es:

$$\overline{K_g} = \sum_{0}^{2} m_i \overline{V}_i \wedge \overline{G - P_i} \qquad [1]$$

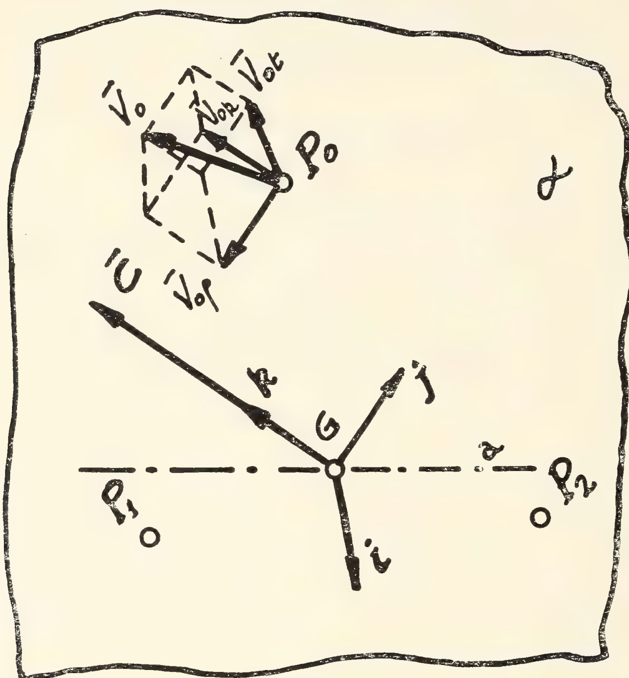


FIGURA 1

donde $\overline{V}_i$ son las velocidades de los puntos P_i.
Reemplazamos los vectores $\overline{V}_i$ en cada punto, por tres componentes $\overline{V}_{ik}$; $\overline{V}_{ip}$; $\overline{V}_{it}$ tal que los primeros ($\overline{V}_{ik}$) sean paralelos al versor $\overline{k}$; los segundos ($\overline{V}_{ip}$) corten a $\overline{k}$ y le sean normales y los últimos, ($\overline{V}_{it}$), sean normales a los dos primeros, es decir situados en el plano $\overline{i}\,\overline{j}$.

A la formación del vector $\overline{K}_g$ sólo contribuyen los $\overline{V}_{it}$ de manera que se puede poner:

$$\overline{K}_g = C\,\overline{k} = (m_0/\overline{V}_{0t}/\rho_0 + m_1/\overline{V}_{1t}/\rho_1 + m_2/\overline{V}_{2t}/\rho_2)\overline{k} \qquad [2]$$

donde ρ_i son las distancias de los puntos P_i al eje $\overline{k}$.

Dada la hipótesis $C \neq 0$ sólo dos de los sumandos que figuran en [2] pueden ser simultáneamente cero; supongamos entonces, fig. 2, $m_1/\overline{V}_{1t}/\rho_1 = 0$ $m_2/\overline{V}_{2t}/\rho_2 = 0$ y tracemos el plano α que contiene

a los tres cuerpos en el instante considerado (*) y sobre él la recta a que pasa por el baricentro y es normal a $\overline{P_0G}$; dada la relación:

$$\sum_{o}^{2} m_i \overline{G - P_i} = 0 \qquad [3]$$

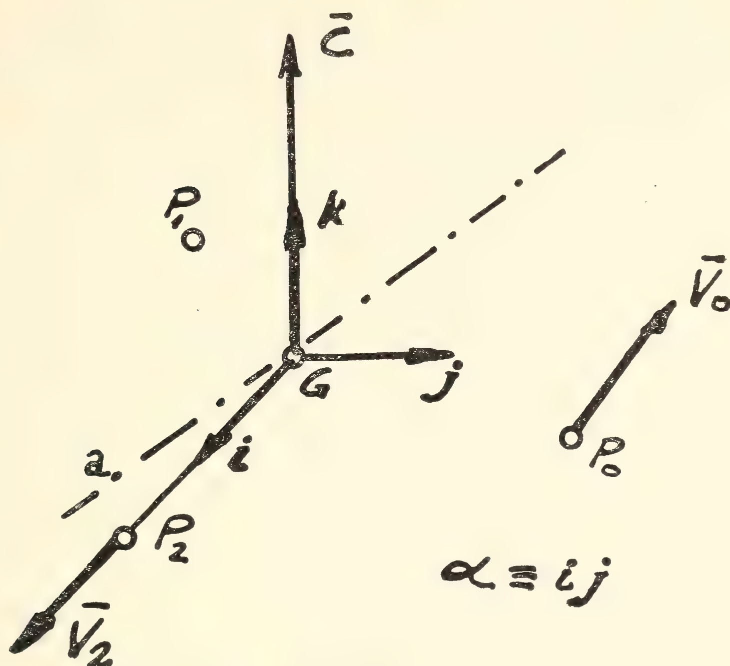


FIGURA 2

siempre habrá, por lo menos, un cuerpo (P_1 ó P_2) situado en el semiplano de origen $\bar{a}$ que no contiene a P_0: sea P_1 ese punto y r_2 su distancia al punto P_0. ($r_2 = /\overline{P_0 - P_1}/$).

El módulo de la fuerza atractiva entre P_0 y P_1 es:

$$f_a = \frac{m_0\, m_1}{r_2^2} \qquad [4]$$

mientras que el módulo de la fuerza centrífuga que actúa sobre P_0 es:

$$f_c = \frac{m_0\ V_{0t}^2}{\rho_0} \qquad [5]$$

pero $/\overline{V}_{0t}/$ de la [2] vale:

$$/\overline{V}_{0t}/ = C/m_0\rho_0 \qquad [6]$$

(*) En este caso el movimiento es necesariamente plano.

que reemplazado en [5] da:

$$f_c = C^2/m_0\rho_0^3 \qquad [7]$$

y por ser siempre $r_2 \geq \rho_0$ es:

$$f_c \geq C^2/m_0 r_2^3 \qquad [8]$$

La relación f_c/f_a tiende a infinito cuando r_2 tiende a cero, luego las fuerzas que tienden a evitar que los dos cuerpos se unan se hacen tan grandes como se quiera y por lo tanto r_2 tiene un límite inferior distinto de cero.

Si uno solo de los sumandos que aparecen en [2] es cero o bien ninguno de ellos es nulo, la demostracción se conduce de la misma manera.

Un ejemplo de aplicación

Una de las soluciones singulares isósceles dadas por A. Fransén [5] (fig. 3), consiste en un movimiento con un eje de simetría

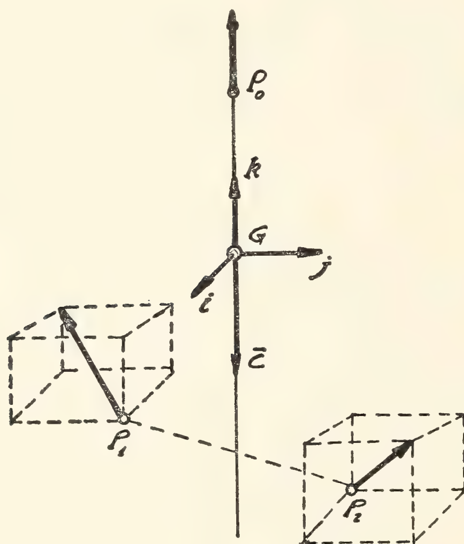


FIGURA 3

sobre el cual se desplaza el cuerpo P_0 (de masa igual o desigual a la de los otros dos) y sobre el cual también se sitúa el vector constante $\overline{K}_g : \overline{K}_g = -C\overline{k}$; los otros dos cuerpos (de masas iguales) P_1 y P_2 se encuentran siempre simétricamente situados con respecto al eje $\overline{k}$.

(5) "Ett special fall af tre-kroppars-problemet: Tva himlakroppar rora sig. pa lika stora afstand fran den tredje". Of versigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar 1895 N° 10, p. 783, Estocolmo.

Ahora bien; P_0 no puede chocar con P_1 pues si así fuera también chocaría P_0 con P_2 en el mismo instante y por razones de simetría, lo cual es imposible por ser $C \neq 0$.

La demostración puede hacerse eligiendo el par P_0 P_1 o el par P_0 P_2 y siguiendo el razonamiento que hemos indicado antes. Pero hay más, tampoco pueden existir colisiones binarias; en efecto queda por investigar el posible choque entre P_1 y P_2 el cual es imposible pues las fuerzas centrífugas que obran sobre P_1 y P_2 tienen la dirección $\overline{P_1 P_2}$ y tienden a alejarlos. La distancia $r_0 = \overline{P_1 - P_2}$ tiene entonces un límite inferior distinto de cero y el movimiento es *regular* para todo t desde $-\infty$ a $+\infty$ — resultado ya señalado por Chazy, [6] (pág. 187).

En el segundo caso de Fransén, (fig. 4) existe un plano de simetría y el momento cinético vale $\overline{K}_g = C\overline{j}$, luego si bien no pueden existir

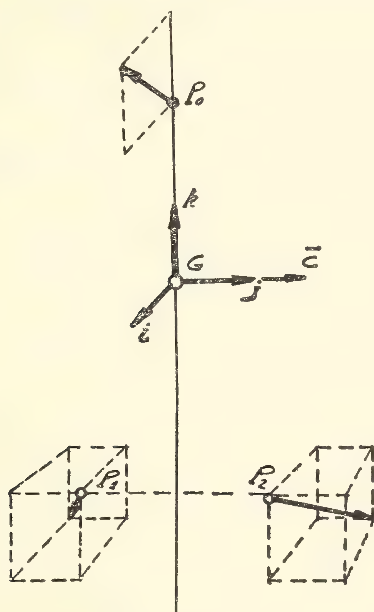


FIGURA 4

colisiones triples ($C \neq 0$) sí pueden existir colisiones binarias entre los dos cuerpos de masas iguales P_1 y P_2 por cuanto en este caso, las fuerzas centrífugas tienen dirección *normal* a $\overline{P_1 P_2}$ y no pueden neutralizar a la fuerza atrayente de dirección $\overline{P_1 P_2}$.

El que realmente suceda o no un choque binario depende de las condiciones iniciales y del valor de la constante de las fuerzas vivas.

(6) "Sur les solutions isoscéles du probléme des trois corps". Bulletin Astronomic. (2)-1-1921, p. 171.

SOBRE LAS CINEMATICAS RELATIVISTAS

J. C. VIGNAUX

Las Cinemáticas relativistas de Newton y de Einstein, tienen sus fundamentos, como es bien conocido, en las *transformaciones de Galileo* y de *Lorentz* respectivamente. La primera es una homografía *parabólica* mientras, la de Lorentz define una homografía *hiperbólica.*

Desde el punto de vista matemático podemos considerar también los otros tipos de homografía; es decir, la homografía *hiperbólica* (discorde) y la *elíptica.* Estas transformaciones conducen igualmente a otras Cinemáticas relativistas como luego veremos

También establecemos relaciones que ligan íntimamente estas Cinemáticas con los *complejos* y las *matrices binarias.*

2 **Cinemática parabólica.**. La transformación de Galileo (unidimensional) está definida por las relaciones:

$$\begin{cases} x' = x - wt \\ t' = t \end{cases} \qquad (w \neq 0) \qquad [1]$$

donde w representa una velocidad constante y t la variable tiempo.

De la [1] resulta la ley de composición de las velocidades:

$$v' = v - w \quad \text{donde} \quad v = \frac{x}{t}, \qquad v' = \frac{x'}{t'}. \qquad [2]$$

La ecuación [2] define una *homografía* de las variables v y v' donde las relaciones [1] constituyen su forma homogéneas de las variables x, t. Siendo los elementos *unidos* iguales: $v' = v = +\infty$, la homografía es *parabólica.* El determinante de la transformación vale:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -w \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1,$$

luego, la transformación [1] es recíproca; es decir su transformación inversa tiene la misma forma.

La transformación de Galileo se puede obtener reciprocamedte de la fórmula de la composición de las velocidades.

Forma compleja. Empleando algunos resultados del complejo parabólico (dual) [1], propongo una nueva forma de la transformación de Galileo. El complejo parabólico es de la forma: $z = x + ky$ donde x é y son reales y k representa la *unidad imaginaria parabólica* (dual) con: $k^2 = 0$.

Su *forma factorial* es:

$$z = \rho\,(1 + k\sigma)$$

donde: $\rho = x$, $\sigma = \dfrac{y}{x}$. Los números ρ y σ llamamos: *módulo dual* y *argumento dual* respectivamente: $\rho = \text{modd}\, z$, $\sigma = \text{argd}\, z$.

Dados los complejos parabólicos z y z', se tiene:

$$\begin{cases} \text{modd}\,(z\,z') = \text{modd}\, z \,.\, \text{modd}\, z' \\ \text{argd}\,(z\,z') = \text{argd}\, z + \text{argd}\, z'. \end{cases}$$

La *forma exponencial* es:

$$z = \rho\, e^{k\sigma}.$$

donde:

$$e^{k\sigma} = 1 + k\,\sigma \quad , \quad e^{-k\sigma} = 1 - k\sigma.$$

Si:

$$z = \rho\, e^{k\sigma}, \qquad z' = \rho' e^{k\sigma'}$$

resulta:

$$z' = \rho\,\rho'\, e^{k\,(\sigma+\sigma')}.$$

La transformación [1] se puede expresar mediante una expresión lineal de una variable compleja parabólica

En efecto; resulta:

$$\begin{aligned} t' + k\,x' &= t + k\,x - k\,w\,t \\ &= (t + k\,x)\ (1 - k\,w) \quad , \quad (k^2 = 0). \end{aligned}$$

Por ser

$$1 - k\,w = e^{-k\,w},$$

la igualdad anterior se puede escribir:

$$\boxed{z' = e^{-k\,w}\, z}\ , \qquad [3]$$

donde:

$$z = t + k\,x \quad \text{y} \quad z' = t' + k\,x',$$

representan dos variables complejas parabólicas.

[1] J. C. Vignaux: "Sobre el número complejo dual". Anales de la Sociedad Científica Argentina, marzo 1936: "La teoría de las funciones poligéneas", Contribución al Estudio de las Ciencias Físicomatemáticas". La Plata, (Sept. 1936).

A la [3] llamaremos la *forma compleja* de la transformación de Galileo. Su transformación inversa es:

$$z = e^{kw} z'. \qquad [3']$$

La transformación [3] forma un *grupo*; pues haciendo sucesivamente las transformaciones:

$$z' = e^{-kw} z \quad \text{y} \quad z'' = e^{-kw'} z'$$

resulta:

$$z'' = e^{-kw''} z$$

donde:

$$w'' = w + w'$$

Tomando módulo y argumento (dual) de la (3); se tiene:

$$\begin{cases} \text{modd}\, z' = \text{modd}\, e^{-kw} \,.\, \text{modd}\, z \\ \text{argd}\, z' = \text{argd}\, e^{-kw} + \text{argd}\, z \end{cases}$$

de donde resultan las dos *invariantes* fundamentales:

$$\begin{cases} t' = t \\ v' = v - w, \end{cases}$$

La transformación de Galileo:

$$z' = e^{-kw} z$$

define una función compleja de la variable z $= t + kx$, *monógena* y su derivado es:

$$\frac{d\,z'}{dz} = e^{-kw};$$

Luego:

$$\boxed{d\,z' = e^{-kw} d\,z}$$

forma diferencial de la transformación. De esta expresión y con el mismo procedimiento anterior, se deducen los *invariantes* diferenciales y la forma general de la composición de las velocidades.

Forma matricial. Consideremos la matriz de la transformación (1):

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -w \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

La regla del producto matricial da:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ t' \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} x \\ t \end{Bmatrix} \qquad [4]$$

donde x, t y x', t' son las componentes de un vector y de su homólogo respectivamente. La matriz A se puede poner en la forma exponencial (1):

$$A = e^{-w\|k\|}$$

donde $\|k\|$ representa la *matriz parabólica*: $\|k\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, siendo

$$\|k\|^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{(matriz cero)}$$

Según esto, la [4] se puede escribir así:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ t' \end{Bmatrix} = e^{-w\|k\|} \begin{Bmatrix} x \\ t \end{Bmatrix}$$

y llamaremos la *forma matricial exponencial.*

3. — **Cinemática hiperbólica.** La transformación de Lorentz (unidimensional) se escribe en la forma simple:

$$x' = \frac{x - w\,t}{\sqrt{1 - w^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - w\,x}{\sqrt{1 - w^2}} \qquad [1]$$

cuando se toma como unidad de velocidad la velocidad c de la luz en el vacío. Para que la transformación sea *real* es necesario que la velocidad constante w sea:

$$|w| < 1.$$

De la [1] resulta la ley de composición de las velocidades:

$$v' = \frac{v - w}{1 - w\,v} \quad , \quad v = \frac{x}{t} \quad , \quad v' = \frac{x'}{t'} \qquad [2]$$

La relación [2] define una homografía de las variables v y v' siendo la [1] su forma homogénea, de las variables x y t. Los elementos *unidos* de la homografía valen:

$$v' = v = \pm 1,$$

ella es *hiperbólica.* Además como su determinante fundamental es: $\Delta = +1$, la transformación resulta recíproca y por ser *positivo* la homografía hiperbólica es *concorde.*

Paralelamente a la transformación de Lorentz hemos considerado la transformación (2):

$$x' = \frac{x - w\,t}{\sqrt{w^2 - 1}} \quad , \quad t' = \frac{t - w\,x}{\sqrt{w^2 - 1}} \qquad (w^2 > 1) \qquad [3]$$

(1) J. C. Vignaux: "Algebra de la matriz binaria". (En curso de publicación).
(2) "Sobre la transformación de Lorentz y el complejo hiperbólico". Anales de la Sociedad Científica Argentina (1961).

siendo su forma no homogénea:

$$v' = \frac{v - w}{1 - v\,w}, \qquad [4]$$

es decir; la misma expresión [2] pero con la hipótesis en ésta de $|w| > 1$.

La transformación [3] es una homografía hiperbólica de determinante *negativo*: $\Delta = -1$; luego ella es *discorde*.

Sobre esta transformación se puede construir una Cinemática relativista siendo w *mayor* que la velocidad c de la luz. La ley de composición de las velocidades es la misma que la de Einstein. En cuanto a v puede ser menor o mayor que c.

Vamos a deducir estas dos transformaciones correlativas, de la fórmula:

$$v' = \frac{v - w}{1 - w\,v} \qquad (w \neq 0), \qquad [5]$$

de la composición de velocidades. Esta relación define una homografía no idéntica, puesto que su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & w \\ w & 1 \end{vmatrix} = 1 - w^2$$

es distinto de cero para: $w^2 \neq 1$.

Consideremos los dos casos posibles: $w^2 \lessgtr 1$.

Si $|w| < 1$; el determinante Δ es *positivo*; luego la homografía es *concorde*. Pongamos: $w = \operatorname{th} \theta$ y considerando las coordenadas homogéneas:

$$v = \frac{x}{t}, \quad v' = \frac{x'}{t'}$$

la [5] resulta:

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x - t \operatorname{th} \theta}{t - x \operatorname{th} \theta} = \frac{x \operatorname{ch} \theta - t \operatorname{sh} \theta}{t \operatorname{ch} \theta - x \operatorname{sh} \theta},$$

y esta puede ser substituida, por las dos relaciones:

$$\begin{cases} x' = x \operatorname{ch} \theta - t \operatorname{sh} \theta \\ t' = t \operatorname{ch} \theta - x \operatorname{sh} \theta, \end{cases}$$

determinado convenientemente el factor arbitrario de proporcionalidad.

(3) J. C. Vignaux: "Homografía y métricas euclidianas". (En curso de publicación).

Recordando que:

$$\text{ch}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \quad , \quad \text{sh}\,\theta = \frac{w}{\sqrt{1-w^2}} \qquad (w^2 < 1),$$

las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma [1].

Si $|w| > 1$; el determinante resulta *negativo*, luego la homografía es *discorde*. Pongamos: $w = \text{cth}\,\theta$ y mediante las coordenadas homogéneas, la [5] resulta:

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x\,\text{sh}\,\theta - t\,\text{ch}\,\theta}{t\,\text{sh}\,\theta - x\,\text{ch}\,\theta}$$

o bien:

$$\begin{cases} x' = x\,\text{sh}\,\theta - r\,\text{ch}\,\theta \\ t' = t\,\text{sh}\,\theta - x\,\text{ch}\,\theta \end{cases}$$

Siendo:

$$\text{sh}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{w^2-1}} \quad , \quad \text{ch}\,\theta = \frac{w}{\sqrt{w^2-1}} \qquad (w^2 > 1)$$

las relaciones anteriores se escriben en la forma [3].

Forma compleja. La transformación de Lorentz [1] y su correlativa [3] están ligados con el complejo *hiperbólico.* Ellas se pueden escribir así:

$$z' = e^{-j\theta} z \quad , \quad z = e^{j\theta} z'$$

donde:

$$e^{j\theta} = \text{ch}\,\theta + j\,\text{sh}\,\theta, \quad e^{-j\theta} = \text{ch}\,\theta - j\,\text{sh}\,\theta;$$
$$z = t + x\,j, \qquad z' = t' + x'\,j;$$

j es la *unidad imaginaria hiperbólica*: $j^2 = +1$.

Análogamente la [3] se escribe:

$$z' = j\,e^{-j\theta} z \quad , \quad z = j\,e^{j\theta} z'.$$

De estas expresiones complejas resultan fácilmente, las fórmulas fundamentales de la Cinemática de Einstein y de su correlativa. (2)

Forma matricial. Consideremos la matriz de la transformación de Lorentz.

$$B = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} & \frac{-w}{\sqrt{1-w^2}} \\ \frac{-w}{\sqrt{1-w^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \end{matrix} \right\| \qquad (|w| < 1);$$

y poniendo: $w = \text{th}\,\theta$, resulta:

$$B = \begin{Vmatrix} \text{ch}\,\theta & -\text{sh}\,\theta \\ -\text{sh}\,\theta & \text{ch}\,\theta \end{Vmatrix}.$$

Esta matriz se puede poner en las dos formas siguientes:

$$B = \text{ch}\,\theta \cdot \|1\| - \text{sh}\,\theta \cdot \|j\| \quad (\textit{forma trigonométrica})$$

y también:

$$B = e^{-\theta\|j\|} \quad (\textit{forma exponencial})$$

donde:

$$\|j\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

representa la matriz *unidad hipérbolica* con:

$$\|j\|^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = +\|1\|. \text{ (matriz unidad)}$$

Según esto; la transformación de Lorentz resulta:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ t' \end{Bmatrix} = e^{\theta\|j\|} \begin{Bmatrix} x \\ t \end{Bmatrix};$$

llamada la *forma matricial exponencial*).(1)

4.— **Cinemática elíptica.** Consideremos finalmente la transformación lineal y homogénea:

$$x' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 + w^2}}, \quad t' = \frac{t + wx}{\sqrt{1 + w^2}} \qquad [1]$$

y su forma no-homogénea:

$$v' = \frac{v - w}{1 + wv}, \qquad [2]$$

donde las letras tienen el mismo significado cinemático de las transformaciones de Lorentz. La [2] define una homografía *elíptica* de elementos unidos: $v' = v = \pm i$ ($i^2 = -1$). El determinante de la [1] vale: $\Delta = +1$, la transformación es recíproca.

Sobre la transformación [1] se puede desarrollar igualmente una cinemática relativista, donde la ley de composición de las velocidades es la [2].

De la [1] resulta:

$$x^2 + t^2 = x'^2 + t'^2,$$

es decir; la expresión $\gamma^2 = x^2 + t^2$ es un *invariante* de la transformación [1].

Poniendo:

$$w = tg\,\varphi \quad , \quad v = tg\,\alpha \quad , \quad v' = tg\,\alpha';$$

la [2] da:

$$tg\,\alpha' = tg\,(\alpha + \varphi)$$

de donde:

$$\alpha' = \alpha + \varphi;$$

luego la expresión: $\alpha' - \alpha = \varphi$ (constante) es también *invariante.*

Igualmente se obtienen las restantes fórmulas de esta Cinemática elíptica, análogas a las de Einstein.

La transformación [1] se puede deducir de la fórmula [2] haciendo $w = tg\,\varphi$ y considerandf coordenadas homogéneas:

$$v = \frac{x}{t} \quad , \quad v' = \frac{x'}{t'}.$$

Se tiene:

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x \text{ cls } \varphi - t \text{ sen } \varphi}{t \text{ cls } \varphi + x \text{ sen } \varphi},$$

ó bien:

$$\begin{cases} x' = x \cos\varphi - t \text{ sen } \varphi \\ t' = t \cos\varphi + x \text{ sen } \varphi \;; \end{cases} \qquad [3]$$

ecuaciones que se pueden escribir en la forma [1] recordando que:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2}} \quad , \quad \text{sen } \varphi = \frac{w}{\sqrt{1 + w^2}}.$$

Forma conpleja. De la [3] resulta:

$$t' + i\,x' = (t + i\,x)\,(\cos\varphi - i \text{ sen } \varphi) \qquad (i^2 = -1)$$

y según las fórmulas de Euler:

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos\varphi + i \text{ sen } \varphi \;,\; e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \text{ sen } \varphi\,,$$

la igualdad anterior resulta:

$$z' = e^{-i\cdot\varphi} z \;,\; z = e^{i\cdot\varphi} z' \;;$$

donde:

$$z = t + i\,x \quad , \quad z' = t' + i\,x'$$

son variables complejas (elípticas). La [4] es la *forma compleja* de la *transformación elíptica* [1].

De la expresión [4] y empleando la Algebra de estos complejos podemos deducir también, como en los casos anteriores, las fórmulas fundamentales de esta cinemática elíptica.

Forma matricial. Consideremos la matriz de la transformación [1]:

$$C = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+w^2}} & \dfrac{-w}{\sqrt{1+w^2}} \\ \dfrac{w}{\sqrt{1+w^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+w^2}} \end{Vmatrix};$$

con la relación: $w = \operatorname{tg} \varphi$; resulta:

$$C = \begin{Vmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{Vmatrix}.$$

La matriz C, se puede escribir así:

$$C = \cos \varphi \, \|1\| - \operatorname{sen} \varphi \, \|i\| \quad (\textit{forma trigonométrica})$$

y también:

$$C = e^{-\varphi \|i\|} \quad (\textit{forma exponencial})$$

donde:

$$\|i\| = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

representa la matriz *unidad elíptica* con:

$$\|i\|^2 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = -\|1\| \quad (\text{matriz unidad})$$

La r transformación [1] resulta entonces:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ t' \end{Bmatrix} = e^{-\varphi \|i\|} \begin{Bmatrix} x \\ t \end{Bmatrix}$$

(*forma matricial* exponencial).

La transformación elíptica escrita en la forma:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - t \operatorname{sen} \varphi \\ t' = x \operatorname{sen} \varphi + t \cos \varphi, \end{cases} \qquad [1]$$

significa una rotación de un ángulo φ en el plan coordinado $0xy$. Minkowki dio a la transformación de Lorentz, una expresión análoga a la anterior considerando el ángulo φ y el tiempo t *imaginarios*: $t = iu$, $t' = iu'$ ($i^2 = -1$). La transformación de Lorentz significa una rotación de un *ángulo imaginario* en el plan $0xu$.

Un resultado análogo obtenemos para la transformada de Galileo, empleando *imaginarios duales*. En efecto; si en la [1] ponemos:

$$\varphi = kw \ , \ x = kX \ , \ x' = kX' \quad (X, X' \text{ reales})$$

y teniendo en cuenta que:

$$\cos (kw) = 1 \ , \ \operatorname{sen} (kw) = kw \quad (k^2 = 0).$$

resulta la transformación de Galileo:

$$\begin{cases} X' = X - wt \\ t' = t \end{cases}$$

de las variables reales X, t.

Luego; *la transformación de Galileo, significa una rotación de un ángulo imaginario* (*dual*) *en el plano* (X, t).

La interpretación geométrica de cada una de estas Cinemáticas, mediante las *métricas enclidianas*: *elíptica, hiperbólica* y *parabólica* ([3]) dará lugar a otra publicación.

Entregado el 10 de Diciembre de 1961.

BIBLIOGRAFIA

L. Van Der Waerden: *Moderne Algebra.* Stolz-Gmeiner; *Theoretisch Arithmetik,* t. II.

J. Rey Pastor: *Análisis Algebraico.*

G. Castelnuovo: *Lecciones de Geometría Analítica.*

C. Mac Duffee: *The theory of matrices.*

R. Goursat: *Cours d'Analyse.*

P. Langevin: *Introducción a la relatividad.*

RESPUESTA INMUNOLOGICA A VACUNAS TRIVALENTES DE VIRUS AFTOSO INACTIVADO PROPAGADO EN CULTIVO DE CELULAS RENALES

BERNARDO EPSTEIN (1)

Summary. — Argentine field strains of the O,A and C types of Foot-and-Mouth Disease virus (FMDV) were adapted to tissue culture of seven different species of vertebrates and to pig kidney cell cultures, was specifically inhibited by immune serum.

Significant ammounts of high titer antigenic material were prepared in tissue culture for experimental vaccine production and inactivated with beta propiolactone (BPL). These strains were able to develop a significant high degree of neutralizing antiboidies in cattle.

Experiments were conducted to demonstrate the course of these levels in post-vaccinal titrations; the vaccine was both effective and safe to immunize 20.000 head of cattle against FMD in field trials.

INTRODUCCION

Es un hecho conocido que en la prevención de la Fiebre Aftosa se aplican diferentes procedimientos técnicos para la producción de virus destinados a las vacunas.

El desarrollo de las técnicas de cultivos de tejidos fué un hecho atractivo inclusive para los virus de la Fiebre Aftosa, FA., no solamente para su estudio e identificación sino como fuente de producción de un antígeno industrial. En ese sentido son numerosas las publicaciones sobre aspectos cuantitativos de la multiplicación de virus de la FA, en monoestratos de cultivo de tejido de células renales demostrando que el virus cultivado e inactivado estimula la producción de anticuerpos inmunizantes (1-2-3-4-5-6-7-17). Las ventajas de las técnicas de cultivos de tejidos para la producción de vacunas contra diferentes virosis es un hecho científico ampliamente aceptado. El empleo de las células renales para la producción de un virus de buen título destinado a la producción de un antígeno indicado para la preparación de vacunas es una información básica dentro del problema inmunológico de la F.A.

Estos estudios corresponden a las respuestas inmunitarias séricas, consistente en la verificación de la constitución cualicuantitativa de

(1) Profesor Titular de Anatomía y Fisiología Patológicas — Facultad de Ciencias Veterinarias, Universidad Nacional de La Plata.

anticuerpos específicos neutralizantes para cada tipo de virus de la FA. antes y luego de vacunados.

Material y métodos. Riñones de suinos de 8 a 16 semanas son retirados asépticamente y recolectados en recipientes estériles. Retirada la corteza renal es cortada en fragmentos de 2 a 4 milímetros y lavados repetidamente en una solución salina buffer de fosfatos PBS.

Luego de centrifugadas a 600 r.p.m. se resuspenden definitivamente en el medio de cultivo de crecimiento en concentración celular de 6×10^5 por ml. El medio utilizado contiene 0.5 % de hidrolizado enzymático de lactoalbumina, 20 % de suero equino inactivado, penicilina 250.000 un/ml. estreptomicina 250ug/ml. mycostatin 250 u/ml. resuspendido en solución salina de Hanks. El recuento celular es estimado por la numeración nuclear de células tratadas con una solución de cristal violeta en solución acuosa de ácido cítrico al 0.1.([10]) Las suspensiones celulares se distribuyen en tubos de ensayo de 16 × 150 en cantidad de 1.0 ml. por c/u y en cantidades de 60 ml. en los frascos Roux. Luego de tapados con tapones de goma los tubos y frascos de cultivo son incubados en posición estacionaria horizontal a temperatura que oscilan entre 36.5 a 37 grados C. en estufas con ventilación forzada durante 5 días. Durante este tiempo se desarrolla una superficie monocelular confluente de células epiteliales que cubren la superficie. El medio de mantenimiento de estos cultivos es de la misma composición que el anterior, variando solamente la concentración del suero equino que es reducido al 10 % ajustado el pH a 7.4 con solución de Bicarbonato de sodio al 7.5 %

Virus. Las cepas de virus aftoso utilizadas fueron del tipo A, O, y C originarias de brotes epizooticos de F.A.en Argentina, luego de tipificada por pruebas de neutralización y fijación de complemento fueron adaptadas a cultivo de tejidos en más de 50 pasajes por cultivo de tejidos renales de diferentes especies, bovino, suino, conejo, cobayo cricetus, gato y embriones de ratón. Detalles de estos estudios fueron publicados.([6])

Titulación del virus. Soluciones seriadas al décimo en P.B.S. utilizando diferentes pipetas para cada dilución del virus, fueron inoculadas en cantidad de 0.1 ml. por tubo de cultivo de tejido conteniendo 0.9 de medio nutritivo, se emplearon 4 tubos por cada dilución y por tipo. Estos CT. fueron examinados diariamente durante 3 días para protocolar el grado de la lesión citopatogénica provocada por el virus de la FA.

En todos los casos se determina el punto final de citopatogenicidad 50 % de infecciosidad ($CTID_{50}$) calculados por los métodos de Reed y Muench [12] y el de Karber [13].

Estudios citopatológicos en la FA. se publicaron separadamente. (6.11)

Test de color. Es el mismo test utilizado por nosotros para titular virus y sus anticuerpos en encefalomielitis equina tipo Oeste. [14] con

CUADRO 1

Titulación por el test de color (rojo fenol) con células renales versenadas

Titulación	pH						Nº de
Dilución del Virus [1] (logaritmo negativo)	7.6	7.4	7.2	7.0	6.8	6.6	Positivos
0	4	0	0	0	0	0	4/4 [3]
2.0	4	0	0	0	0	0	4/4
3.0	4	0	0	0	0	0	4/4
4.0	4	0	0	0	0	0	4/4
5.0	4	0	0	0	0	0	4/4
6.0	4	0	0	0	0	0	4/4
7.0	2	0	0	0	1	1	2/4
8.0	0	0	0	0	0	4	0/4
Dilución de anticuerpos [?] (recíproco)							
0	0	0	0	0	0	4	0/4
10	0	0	0	0	0	4	0/4
40	0	0	0	0	0	4	0/4
160	0	0	0	0	0	4	0/4
640	0	0	0	0	0	4	0/4
2500	0	0	0	0	0	4	0/4
5000	2	0	0	0	0	2	2/4
10.000	2	0	0	0	1	1	2/4
40.000	4	0	0	0	0	0	4/4

la única diferencia que en este caso se emplearon cultivos primarios de células renales de cerdo. Las suspensiones celulares se preparan en una solución de versene 1:5000. Resuspendiendo 50.000 células

[1] 0.2 ml. de virus + 0.2 ml. de células.

[2] 0.2 ml. de suero + 0.2 de virus (100 unidades $CTDI_{23}$).

[3] Numerador: número de tubos positivos. Denominador: número de tubos inoculados o de celdas plásticas.

viables en 0.2 ml. en cada tubo el que ya contiene la mezcla de suero virus o la dilución del virus control, todos los tubos son cubiertos con vaselina líquida estéril e incubadas a 37° grados C. En test muy grandes se utilizan "Disposo Tray" paneles plásticos con capacidad de 2ml. por copa ([15]).

Como se especifica en la Tabla. ([1])

Test de neutralización. Las pruebas de neutralización preliminares se realizan mezclando iguales cantidades de suspensiones de virus titulados previamente. Los sueros utilizados tienen inhibición del crecimiento del virus. Estos mismos sueros son sometidos a test de neutralización cuantitativa mezclándose con una cantidad equivalente a más de 100 DCT.de virus cultivado en células renales de cerdo.

Las diluciones séricas más bajas correspondieron al 1:10 y las más elevadas a 1:10.000. En todas las pruebas la mezcla suero virus es conservada a temperatura de laboratorio y la cantidad de 0.2 es inoculada por tubo de cultivo empleando 4 por dilución.

Características de la vacuna y controles. El material antigénico usado para la preparación de la vacuna es colectado luego de las 18 a 20 horas de inoculado el virus en los cultivos, presentando el grado máximo de citopatogenicidad. Se efectuan cosechas por tipo de virus centrifugando los "Pool" para la retención de restos celulares. Partes iguales de cada tipo de virus de la FA son mezclados y estabilizados con un buffer de glicocola e inactivados con beta propio lactona al 0.02 % BPL ([2]) mantenidos a menos de 25° grados C. hasta que el control revela que no contiene virus activo.

La mezcla final con hidróxido de aluminio y glicerina está de acuerdo al cálculo de $CTID_{50}$ de los títulos previos para cada tipo de virus de la FA. que no fueron menores a $10^{-7.5} \times 0.1$ ml. En cada lote de vacuna se verifica esterilidad, efectividad y potencia. Para el control de no infectividad se utilizan ratones lactantes inyectados por vía parenteral y en vacunos por vía lingual. La dosis de vacuna es de 2 cc. conteniendo 30 % deHidróxido de Aluminio e igual cantidad de virus.

Bovinos de más de 18 meses de edad, de diferentes razas y sexos, perfectamente identificados, fueron empleados en este experimento controlado.

Se recolectaron muestras de sangre previas y posteriores a la vacunación, no utilizando en ningún caso soluciones anticoagulantes.

([1]) Fabricados por Limbro Co. New Haven Conn U.S.A.
([2]) B.P.L. Beta propilactona Goodrich Chemical Co. Cleveland Ohio. USA

Las recolecciones posteriores a la vacunación se practicaron entre las 4 y 8 semanas.

Resultados. En este experimento participaron nueve diferentes lotes de animales, obteniendo una muestra representativa por grupos de vacunados. El propósito de este estudio, era determinar los anticuerpos prevacinales de la población, y la efectividad de producir anticuerpos con la vacuna, en un experimento a campo, sobre el 1 % de estos grupos. Los inconvenientes de pérdidas de tubos, hemólisis roturas y contaminaciones, llevaron a 0.5 % las muestras representativas de la población.

Los sueros titulados donde se identifican los números de especímenes por establecimiento, resultaron con una protección menor de 1/10, tabla N°. (2). Los sueros posteriores a la vacunación se identi-

CUADRO 2

Clasificación de todos los especímenes de sueros y determinación de anticuerpos pre-vaccinales para tres tipos de virus de la F.A.

Número de bovinos		Dilución de anticuerpos
M.G.	5	1:10
L.P.	10	1:10
E.L.	3	1:10
$M.G_2$	3	1:10
E.Z.	18	1:10
E.N.	27	1:10
E.S.	8	1:10
E.CH.	4	1:10
E.P.	22	1:10

fican individualmente en la tabla N°. (3) y la distribución porcentual por inmuno tipo luego de la vacunación en la Fig.1.

Destacando que la distribución de anticuerpos prevacinales y los obtenidos luego de la inoculación del antígeno inactivado de FA. corresponden a valores del 94 % para el tipo A, 91 % para el tipo C y 81 % para el tipo 0, en títulos séricos mayores de 1:160 a 1:10.000.

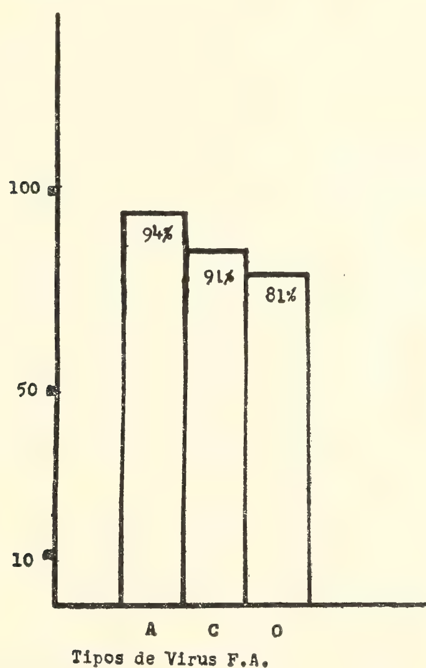
Por medio del test de color fue posible rectificar los valores obtenidos por las pruebas de neutralización en tubos de cultivo con la ventaja de obtener resultados más rápidos y económicos al comparar

CUADRO 3

Clasificación de muestras individuales post vaccinales por inmuno tipo

Tipo de virus aftoso			Dilución de anticuerpos
A	C	0	
5	8	17	1:10
3	1	2	1:40
3	2	1	1:160
2	12	3	1:640
24	19	10	1:2500
8	3	3	1:5000
57	55	64	1:10.000

Totales 100.



Distribución porcentual de todos los especímenes titulados por inmuno tipo luego de vacunados con virus de Cultivo de Tejidos. Corresponden a diluciones de anticuerpos 1:10 a 1:10.000.—

ambos métodos. Cuando se emplearon sueros post vaccinales se encontraron títulos bien definidos frente a la cantidad constante de virus estos valores oscilaron entre 1:40 y 1:10.000. No obstante algunos

de los bovinos fallaron en la elevación de sus anticuerops, pero al aumentar el 20 % de la composición antigénica de la vacuna desde el caso Mg2 en adelante, ver tabla N°.2 el punto final del título se elevó notablemente. Es por ello que consideramos de interés el estudio de la correlación existente entre, títulos de los anticuerpos, concentración del antígeno e inmunidad para cada tipo de virus de la FA.

*Descarga de virus sobre los vacunados.*Para comprobar si la elevación de anticuerpos tiene relación directa con la protección a una descarga experimental de los tres tipos de virus de la FA. se trataron tres lotes de 5 bovinos cada uno y control con una descarga intralingual de 10^4 DL_{50}. Cada tipo de virus fue titulado previamente en ratón lactante de 2 a 4 días por vía intraperitoneal utilizando camadas de 6 por dilución, con test comparativo de color y cultivo de tejidos. Los bovinos que no mostraron protección desarrollando lesiones podales, correspondían a los grupos de anticuerpos por encima de 1:40 y los de niveles mayores fueron completamente protegidos de la generalización.

Discusión. La aplicación de las técnicas de cultivo de tejido para la producción de vacunas antivíricas como de la FA. tienen varias ventajas. En el trabajo presentado se demostró que el virus de la FA. puede desarrollarse en cultivos de monoestratos como lo comprobasen (1-2-3-4-5-) en células renales de cerdo, permitiendo por su citopatonicidad en los cultivos y por el test de color medir exactamente la concentración de virus producido. Los métodos empleados son relativamente sencillos y posible de reproducir sin dificultad los tres tipos de virus en tubos o en frascos de Roux, en los tiempos indicados, con un costo razonable. La respuesta inmunitaria de los animales vacunados con vacuna de CT, de diferente concentración de antígeno, se pueden determinar por suero neutralización en CT y por la prueba de color.

Este tipo de vacunas preparada en CT con virus adaptados sobre diferentes especies ha demostrado ser de capacidad antigénica satisfactoria. La mayoría de los sueros post vaccinales neutralizan los virus de la FA. con títulos significativos.

Bovinos inmunizados con respuestas altas de anticuerpos toleran la descarga de virus infeccioso por vía intralingual en más de un 75 % de casos sin provocar la enfermedad, mientras que los de baja respuesta inmunitaria generalizan la enfermedad con lesiones podales.

BIBLIOGRAFIA

(1) Bacharach, H.L.: Hess, W.R. and Callis:Foot-and-mouth disease virus Its growths and cytopagenicity in T.C. Science 122 (1955) :12-6

(2) Seller, R.F: Growt and titration of the FMD virus and Vesicular Stomatitis in Kidney monolayer T.C. Nature 176 (1955) 547-549.

(3) Seller, R.F: Lesley M. Burt, Alison Cumming and Doren L. Stewart: The behaviour of strains of the virus of FMD in pig, calf, ox and lamb kidney TC. Arch.f.d.ges. Virusforsch 9 (1959) -37.

(4) Sellers, R.F: The grot and antigenicity of the virus of FMD in pig kidney Tissue Culture.Arch f.gesamte Virusfosch.5 (1959) -21.

(5) Mazzarachio, V et al: 11 virus aftoso su colture di tessuto "In Vitro" Zooprofilassi.11 (195-) 277 y 12 (1956) 539.

(6) Epstein, B: Suceptibilidad citopatogénica de diferentes sistemas de Cultivo de Tejidos frente a tres virus de la F. Aftosa. Ciencias Vet. México 2 (1959) 161-181.

(7) Epstein,B.: Potencia antigénica del virus aftoso modificado e inactivado en Cultivos de Tejidos. Gaceta Vet.2 (1960) 125.

(8) Youngner,J.S.: Monolayer TC. preparation standarization of suspension of trypsin dispersed monkey kidney cells. Proc. Soc. Explt. Biol. Med. 85 (1954) 202-205.

(9) Rappaport,C.: Trypsinization of monkey kidney tissue. Bull. World Health 14 (1956) 147-166.

(10) Sanford, K.K.et al: The measurament of proliferation in tissue culture by enumeration of cell nuclei. 11 (1951) J. nat Cancer In)t 773.

(11) Epstein, B.: Citopatología en CT. provocada por el virus aftoso Anales XVI Congreso Mundial V*). Madrid 1959.

(12) Epstein, B.: et al Visualization of FMDV antigen by fluorescent antibodies Pan American Vet. Congress Kansas City 1959. y Rev. Fac. C. Vet. La Plata 5 (19-0) 139-141.

13 Reed, L.T. and Muench, H.: A simple method of estimating fitfy percent end point. 27 (1938) 493-497.

(14) Karber, G.: Beitrag zu kollectiven behandlung pharmakolgischer reihen versuch. Arch f. exp. Path u Pharmako 162 (1931) 480-483.

(15) Epstein, B.:Western equine encephalomyelitis virus in TC. and color test titration of virus and its antibodies in Ehrlich cells. Am. J. Vet. Res. 76 (1959) 450.

(16) Melnick, J. L. and Opton, E.M.: Assay of Poliomyelitis neutralizing antibody in Disposable plastic pannels. Bull. World Health 14 (1956) 129-146.

(17) Ubertini, B. Michelsen, E. Nardelli, L.et al: Vaccination des Bovides avec virus aphteux cultive sur cellules renale). Bull. off. int. Epiz. 55 (1961) 1453.

SOBRE LAS COLISIONES N-PLES EN EL PROBLEMA DE N CUERPOS

CARLOS RAITZIN

ZUSAMMENFASSUNG: Durch eine Verschärfung des *WEIERSTRASS-SUNDMANsches Satzes* beweisen wir, dass in dem Zeitpunkt eines Zusammenstosses aller n Kröper, die Momente der Bewegungsgrösse von *jedem* Massenpunkt sämtlich Null sind und dass eine durch *Lagrange* eingeführte Hilfsfunktion, in dem Fall eines Dreierstosses nach Null strebt. Endlich beweist man, dass in dem betrachteten Falle die Zeitintervalle, dass bis der Zusammenstoss abläuft, unter den geeigneten Bedingungen eine positive untere Schränke besitzt. Dieselbe nur von den Anfangswerten des Trägheitsmomentes und seine erste Zeitableitung abhängt.

I — En lo que sigue las magnitudes dinámicas necesarias (T, U, I, $\overline{K}$) están definidas de la manera usual. Suponemos sin pérdida de generalidad que el baricentro de los n cuerpos permanece en reposo coincidiendo con el origen de coordenadas. Consideraremos únicamente el caso de ley newtoniana de atracción pese a lo cual es posible extender los resultados a obtenerse a leyes de otros exponentes.

De la identidad de LAGRANGE resulta fácilmente:

$$2IT = \frac{\dot{I}^2}{4} + \sum(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)^2 \qquad [1]$$

$$\left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

donde ξ, η, simbolizan dos coordenadas diferentes del total de $3n$ que caracterizan la posición de los n cuerpos, multiplicadas cada una por la raíz cuadrada de la masa correspondiente. La sumatoria en [1] se extiende a todos los pares de coordenadas distintas. Considerando en la misma los términos que se refieren únicamente a coordenadas distintas del *mismo* punto material y teniendo en cuenta que la media aritmética no excede a la cuadrática, obtenemos:

$$n\sum_{i=1}^{\eta} m_i^2(x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i)^2 \geq [\sum_{i=1}^{\eta} m_i(x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i)]^2 = \gamma^2 \qquad [2]$$

(m_i = masa del i-ésimo cuerpo)
donde γ es una de las tres constantes de áreas. Procedemos de análogo

modo respecto de las otras dos constantes de áreas α, β. Reemplazando en [1] nos conduce a la desigualdad:

$$2IT \geq \frac{\dot{I}^2}{4} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\eta} = \frac{\dot{I}^2}{4} + \eta \qquad [3]$$

$(\eta = \text{cte.} \geq 0)$

(SUNDMAN)

En el caso particular del problema de tres cuerpos podemos obtener una desigualdad más elaborada. Considerando en la anterior sumatoria únicamente los términos que se refieren a coordenadas homólogas de *distintos* puntos materiales, resulta por la desigualdad de promedios antes indicada:

$$3\sum_{i<j} m_i m_j[(x_i\dot{x}_j - \dot{x}_i x_j)^2 + (y_i\dot{y}_j - \dot{y}_i y_j)^2 + (z_i\dot{z}_j - \dot{z}_i z_j)^2] \geq \qquad [4]$$

$$\geq \sum_{i\neq j} m_i m_j[(x_i\dot{x}_j - \dot{x}_i x_j) + (y_i\dot{y}_j - \dot{y}_i\dot{y}_j) + z_i\dot{z}_j - \dot{z}_i z_j)]^2$$

Se demuestra elementalmente haciendo uso de las expresiones de los vectores posición de los tres cuerpos en función de los vectores determinados por los mismos dos a dos en orden cíclico (que se obtienen teniendo en cuenta que el baricentro permanece en reposo y haciendo uso de la integral vectorial de la cantidad de movimiento y/o de sus proyecciones sobre los ejes coordenados) que la expresión de la función auxiliar introducida por LAGRANGE en su memorable "Essai sur le Problème des Trois Corps" viene dada por:

$$\frac{m_{i-1}}{M}\frac{d\rho}{dt} = \frac{m_{i-1}\sigma}{M} = (x_i\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i x_{i+1}) + (y_i\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i y_{i+i}) + \qquad [5]$$

$$+ (z_i\dot{z}_{i+1} - \dot{z}_i z_{i+1}),$$

$$\left(M = \sum_{i=1}^{3} m_i\right)$$

tomando los subíndices en esta última expresión los valores 1, 2, 3 únicamente, en orden cíclico.

Reemplazando [2] y [5] en [1] resulta la desigualdad más fuerte:

$$2IT \geq \frac{\dot{I}^2}{4} + \eta + \frac{m_1 m_2 m_3}{3M}\sigma^2 \qquad [6]$$

cuya validez, repetimos, está limitada al caso $n = 3$ aunque pueden hacerse extensiones ad-hoc de la función σ al problema de n cuerpos.

II — Supongamos que en el instante $t = t_1$ tiene lugar una colisión simultánea de todos los n puntos materiales. Teniendo en cuenta la fórmula de LAGRANGE:

$$\frac{\ddot{I}}{2} = T + h = U + 2h \qquad [7]$$

y combinándola con [3] para eliminar la energía cinética T, resulta:

$$\frac{\ddot{I}}{2} \geq \frac{\dot{I}^2}{8I} + \frac{\eta}{2I} + h \qquad [8]$$

Análogamente, para el caso $n = 3$ obtenemos:

$$\frac{\ddot{I}}{2} \geq \frac{\dot{I}^2}{8I} + \frac{\eta}{2I} + \frac{(m_1 m_2 m_3)}{6M} \left(\frac{\sigma^2}{I}\right) + h \qquad [9]$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

$$\sum_{i=1}^{\eta} m_i^2 [(x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i)^2 + (y_i \dot{z}_i - \dot{y}_i z_i)^2 + (z_i \dot{x}_i - \dot{z}_i x_i)^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\eta} \overline{K} \times \overline{K}_i = \sum_{i=1}^{\eta} \overline{K}_i^2 = \omega^2(t) \geq 0 \qquad [10]$$

donde los $\overline{K}_i$ simbolizan el momento angular (o momento de la cantidad de movimiento) de *cada* cuerpo resulta la doble acotación:

$$\frac{\ddot{I}}{2} \geq \frac{\dot{I}^2}{8I} + \frac{\omega^2(t)}{2I} + h \geq \frac{\dot{I}^2}{8I} + \frac{\eta}{2I} + h \qquad [11]$$

y una correspondiente expresión para el caso $n = 3$ en particular según lo anterior.

Bajo la hipótesis hecha de que en el instante t_1 se produce una colisión múltiple de todos los cuerpos se sigue que:

$$\lim_{t \to t_1} U = +\infty \qquad [12]$$

y como consecuencia de la integral de energía $T = U + h$ (h: constante de energía) y de la fórmula de LAGRANGE [7] resulta también:

$$\lim_{t \to t_1} T = +\infty \quad [13], \qquad \lim_{t \to t_1} \ddot{I} = +\infty \quad [14]$$

Desde un instante t_0 suficientemente próximo a t_1 se conservará $\ddot{I}$ positiva en todo el intervalo $t_0 \leqq t < t_1$. (En particular si $h > 0$ esto se cumple para todo t). Lo anterior implica que $\dot{I}$ será monótonamente creciente en el intervalo considerado. Pueden presentarse tres casos:

a) $\dot{I}$ se conserva positiva en $t_0 \leqq t < t_1$. Pero esto contradice la hipótesis de que tiene lugar una colisión de todos los cuerpos pues I por definición viene dada por una forma cuadrática definida positiva tanto expresándola en las coordenadas como en función de las distancias mutuas y sólo puede anularse en el caso trivial de anularse unas y otras, es decir en la colisión conjunta de los n cuerpos. Pero por lo anterior I resultará monótonamente creciente a partir de un valor inicial positivo $I_0 = I(t_0)$ (suponemos que $t = t_0$ es un punto regular para las $3n$ coordenadas en función del tiempo y sus primeras y segundas derivadas). En consecuencia no podrá tener lugar una colisión del tipo que aquí consideramos.

b) En el lapso indicado $\dot{I}$ se anula en un punto intermedio pasando de negativa a positiva. En ese caso I presenta un mínimo relativo para ese instante.

Este caso se reduce al a) si ese mínimo es mayor que cero, al c) si ese mínimo es igual a cero.

c) En el lapso $t_0 \leqq t < t_1$, $\dot{I}$ se conserva negativa. Considerando la doble acotación [11] eliminamos los términos $\dot{I}^2/8I$ con lo que resulta una desigualdad más débil suficiente para niestros fines. Multiplicando cada término de la expresión mencionada por la cantidad $-4\dot{I}$ positiva por lo dicho en el intervalo de tiempo anterior e integrando de t_0 a t:

$$\dot{I}_o^2 - \dot{I}^2 \geq -2\int_{t_0}^{t} \frac{\omega^2(t)\dot{I}}{I}\, dt + 4h(I_0 - I) \geq$$
$$\geq 2\eta \log \frac{I_0}{I} + 4h(I_0 - I) \qquad [15]$$
$$(t_0 \leqq t < t_1)$$

De esta expresión resulta de inmediato la siguiente doble acotación de la integral que figura en el segundo término de la anterior cadena de desigualdades:

$$\frac{\dot{I}_o^2}{2} + 2\,|h|\, I_0 \geq -\int_{t_0}^{t} \frac{\omega^2(t)\dot{I}}{I}\, dt \geq \eta \log \frac{I_0}{I} \geq 0 \qquad [16]$$
$$(t_0 \leqq t < t_1)$$

Del penúltimo término resulta de inmediato el teorema de WEIERSTRASS-SUNDMAN pues si $\eta > 0$ salta a la vista que para cada valor de t en el lapso de tiempo indicado resulta una cota inferior positiva de I *. Respecto de la función $\omega^2(t)$ resulta lo siguiente. Suponiendo

* Véase Siegel, obra citada en la bibliografía.

que se conserve en $t_0 \leqq t < t_1$ acotada inferiormente por una cantidad positiva, resulta por consideraciones enteramente análogas otra cota inferior positiva de I para cada valor de t y en consecuencia no puede tener lugar una colisión de todos los cuerpos. Con esto queda demostrado que:

$$\min_{t_0 \leqq t < t_1} \omega^2(t) = 0 \qquad [17]$$

Queremos demostrar ahora que:

$$\lim_{t \to t_1} \omega^2(t) = 0 \qquad [18]$$

Para ello nos apoyaremos en un teorema de Sundman. En efecto, de la [11] se deduce que resulta suficiente probar:

$$\lim_{t \to t_1} \left(\ddot{I}I - \frac{\dot{I}^2}{4} - 2hI \right) = 0 \qquad [19]$$

Pero Sundman ha demostrado (véase la bibliografía) que en el caso de una colisión n-ple se cumple:

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\dot{I}^2}{4I^{1/2}} = \lim_{t \to t_1} \ddot{I}I^{1/2} = \mu_0 = \text{cte.} \qquad [20]$$

lo que tiene como corolario:

$$\lim_{t \to t_1} I^{1/2} \left(\ddot{I}I^{1/2} - \frac{\dot{I}^2}{4I^{1/2}} - 2h\, I^{1/2} \right) = 0 \qquad [21]$$

pues $\lim_{t \to t_1} I^{1/2} = 0$.

De lo anterior y por ser $\omega^2(t)$ forma cuadrática definida positiva que sólo puede anularse con la anulación de *cada* $\overline{K}_i$ resulta el siguiente teorema: **"En caso de una colisión n-ple en el problema de n cuerpos el momento angular de cada cuerpo tiene valor cero en el instante de colisión".**

El teorema de Weierstrass-Sundman es corolario inmediato del anterior.

De la fórmula [9] válida para el caso $n = 3$ obtenemos por idénticas consideraciones el siguiente resultado:

"Se cumple para la función auxiliar de Lagrange:

$$\lim_{t \to t_1} \sigma = 0 \qquad [22]$$

siendo t_1 un instante de colisión triple".

Como otro corolario de lo anterior vamos a obtener bajo determinadas condiciones una cota inferior del intervalo de tiempo que transcurre desde un instante inicial t_0 hasta un instante de colisión n-ple t_1, suponiendo que ésta se produzca.

Por hipótesis para $t = t_0$ se cumple que son regulares las $3n$ funciones del tiempo que constituyen las coordenadas de los n cuerpos y sus primeras y segundas derivadas, cumpliéndose además:

$$\ddot{I}_0 > 0, \quad I_0 > 0, \quad \dot{I}_0 < 0, \quad h \geq 0 \qquad [23]$$

Tenemos como consecuencia de la [11]:

$$\ddot{I} \geq \frac{\dot{I}^2}{4I} \qquad [24]$$

y como en el intervalo $t_0 \leqq t < t_1$ se verifica $\dot{I} < 0$ resulta:

$$-\frac{\ddot{I}}{\dot{I}} \geq -\frac{\dot{I}}{4I} \qquad [25]$$

Integrando de t_0 a t:

$$\log \frac{\dot{I}_0}{\dot{I}} \geq \log \left(\frac{I_0}{I}\right)^{1/4} \qquad [26]$$

y pasando de los logaritmos a los números:

$$\frac{\dot{I}_0}{\dot{I}} \geq \left(\frac{I_0}{I}\right)^{1/4}$$

$$\text{cte.} = -\frac{\dot{I}_0}{I_0^{1/4}} \geq -\frac{\dot{I}}{I^{1/4}}$$

$$(t_0 \leqq i < t_1).$$

(Obsérvese que esto equivale a una parte del resultado de SUNDMAN que hemos antes empleado aunque obtenido en forma más sencilla que la seguida p. ej., por WINTNER).

Integrando nuevamente de t_0 a t:

$$t - t_0 \geq \frac{4}{3}\,(I_0^{3/4} - I^{3/4}) \left(\frac{I_0^{1/4}}{-\dot{I}_0}\right) \qquad [27]$$

Como para $t \to t_1$, $I \to 0$ obtenemos la expresión deseada:

$$t_1 - t_0 \geq -\frac{4\,I_0}{3\,\dot{I}_0} \qquad [28]$$

Supongamos ahora $h < 0$, teniendo en cuenta la [11]. En el intervalo $t_0 \leqq t < t_1$ se cumple, como hemos visto:

$$\ddot{I} > 0 \quad , \quad \dot{I} \to 0$$

Multiplicando:

$$\frac{\ddot{I}}{2} \geqq \frac{\dot{I}^2}{8I} + h \qquad [29]$$

por la cantidad $I^{-\frac{1}{2}}\dot{I}$, negativa en el intervalo considerado, e integrando de t_0 a t resulta como obvia consecuencia:

$$C^2 = \frac{\dot{I}_o^2}{2I_o^{\frac{1}{2}}} - 4hI_o^{\frac{1}{2}} \geqq \frac{\dot{I}^2}{2I^{\frac{1}{2}}} \geqq 0 \qquad [30]$$

$$(t_0 \leqq t < t_1)$$

Siendo $C > 0$ e integrando nuevamente de t_0 a t:

$$\frac{4}{3}\left(I_o^{\frac{3}{4}} - I^{\frac{3}{4}}\right) \leqq C\,(t - t_0) \qquad [31]$$

Como suponemos $\lim\limits_{t \to t_1} I = 0$, resulta:

$$t_1 - t \geqq \frac{4}{3}\,\frac{I_o^{\frac{3}{4}}}{C} = \frac{4}{3}\,\frac{I_0}{\sqrt{\dot{I}_o^2 - 4hI_o}} > 0, \qquad [32]$$

expresión análoga a [28] pero correspondiente al caso $h < 0$.

BIBLIOGRAFIA

SIEGEL: "Vorlesungen über Himmelsmechanik". Springer Verlag, Berlín-Göttingen-Heidelberg, 1956.

WINTNER: "The Analytical Foundations of Celestial Mechanics". Princeton University Press, 1941.

En ambos se hallará una completa bibliografía del problema.

ESPECIES DEL GENERO *ABEDUS* STAL CONSIDERADAS ERRONEAMENTE SINONIMAS DE OTRAS

(*Hemiptera-Belostomatidae*)

JOSE A. DE CARLO [1]

El Dr. Arnold Menke, en su trabajo titulado "A taxonomic study of the genus *Abedus* Stal", publicado en la Universidad de California, Publicaciones de Entomología, vol. 8, págs. 393-440, 44 figs., pone erróneamente en sinonimia mis especies de *Abedus*, en la siguiente forma:

Abedus hungerfordi y *A. mayri*, sinónimas de *Abedus indentatus.*

Abedus montandoni y *A. anconai*, sinónimas de *Abedus dilatatus* Menke.

Abedus drakei y *A. stali*, sinónimas de *Abedus herberti.*

Demostraré con razones morfológicas y dibujos originales correspondientes a esas razones, que el Dr. Menke no ha distinguido bien las especies de *Abedus*, pues de otro modo no me explico que considere por ejemplo, *Abedus hungerfordi*, sinónima de *A. indentatus.*

Estudio comparativo de A. hungerfordi, A. mayri y *A. indentatus.*

Antenas. — En *A. hungerfordi* De Carlo, tiene cuatro segmentos perfectamente separados. Los segmentos segundo y tercero son casi rectos, fig. 10; en *A. mayri* De Carlo, los cuatro segmentos, también como en *A. hungerfordi* De Carlo, se hallan perfectamente separados, pero en esta especie, los segmentos segundo y terceros son curvados, siendo el segundo segmento bastante largo. Las antenas dibujadas de *A. mayri* De Carlo, corresponden a dos machos, figs. 9 y 17.

En *A. indentatus* (Haldeman) la antena es muy típica. Tiene tres segmentos perfectamente separados; el tercero se halla unido parcialmente al cuarto, figs. 11 y 12, cara dorsal y ventral. La unión parcial del artículo tercero y cuarto, es un estado evolutivo hacia la fusión completa de los segmentos tercero y cuarto. Ese estado evolutivo ya

[1] Este trabajo es una pequeña parte de la monografía "Los *Belostomátidos*, especialmente americanos" entregado al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, con motivo de la beca con que fui honrado.

se ha completado en las antenas de otras especies del género, donde el tercero y cuarto segmentos, ya se han fusionado por completo.

Esas antenas tienen por consiguiente, solamente tres artículos, como veremos en *A. montandoni* De Carlo, *A. drakei* De Carlo, etc.

Color del abdomen. — En *A. hungerfordi* De Carlo y en *A. mayri* De Carlo, se observan zonas rojizas, que son bien visibles entre la pubescencia que cubre el abdomen; en *A. indentatus* (Haldeman), no se observan zonas rojizas (según el ejemplar observado). la pubescencia que cubre el abdomen es de color canela uniforme.

Tamaño. — *A. hungerfordi* De Carlo, es más alargada que *A. indentatus*; es de tamaño mayor. *A. hungerfordi*, long. del cuerpo 35 mm; lat. máx., 19 mm (ejemplar holotypus); ejemplar allotypus, long. del cuerpo 35 mm; lat. máx., 18,5 mm. En *A. indentatus* (ejemplar observado) obtenido por canje al Dr. Menke, la long. del cuerpo es de 30,5 mm; la lat. máx., 16,8 mm, sexo macho. *Abedus mayri* De Carlo es de tamaño intermedio entre *hungerfordi* e *indentatus*. Ejemplares estudiados: holotypus, long. del cuerpo 32 mm; lat. máx. 17,3 mm; paratypi: long. 31-33 mm; lat. máx. 16,5-18 mm.

Genitalia. — La parte anterior del aedeagus de *A. indentatus*, fig. 3, es más saliente, es por eso que vista por la parte dorsal, tiene la forma que muestra la fig. 4; en cambio el aedeagus de *A. hungerfordi* visto por la parte dorsal muestra la fig. 5 y el de *A. mayri*, la fig. 6, porque en ambas especies el aedeagus es menos saliente según se ve en la genitalia de *A. hungerfordi*, fig. 2 y en la genitalia de *A. mayri*, fig. 1.

Los harpagones son distintos en las tres especies. En *A. hungerfordi* el cuello del harpagón es más bien robusto, fig. 15; en *A. mayri* el harpagón es más delgado y un poco más largo en la parte anterior del cuello, fig. 14; en *A. indentatus*, la parte anterior del cuello es delgada y un poco inclinada hacia atrás, fig. 13, no así en *A. mayri*.

Apéndices respiratorios. — Tienen también sus diferencias, en la forma, tamaño y ancho, según puede apreciarse en las figs. 7 de *A. hungerfordi*; 8, de *A. mayri* y 16 de *A. indentatus*.

Placa metasternal. — En *A. hungerfordi* la placa metasternal es convexa, no carenada; lo mismo en *A. mayri*. En cambio en *A. indentatus*, la placa metasternal es carenada hasta la mitad anterior a lo largo de la línea media y luego convexa.

Conclusión. — Por las características de las antenas, genitalia, harpagones, apéndices respiratorios, color del abdomen, placa metasternal y tamaño, *A. hungerfordi* De Carlo, no puede ser igual a *A. inden-*

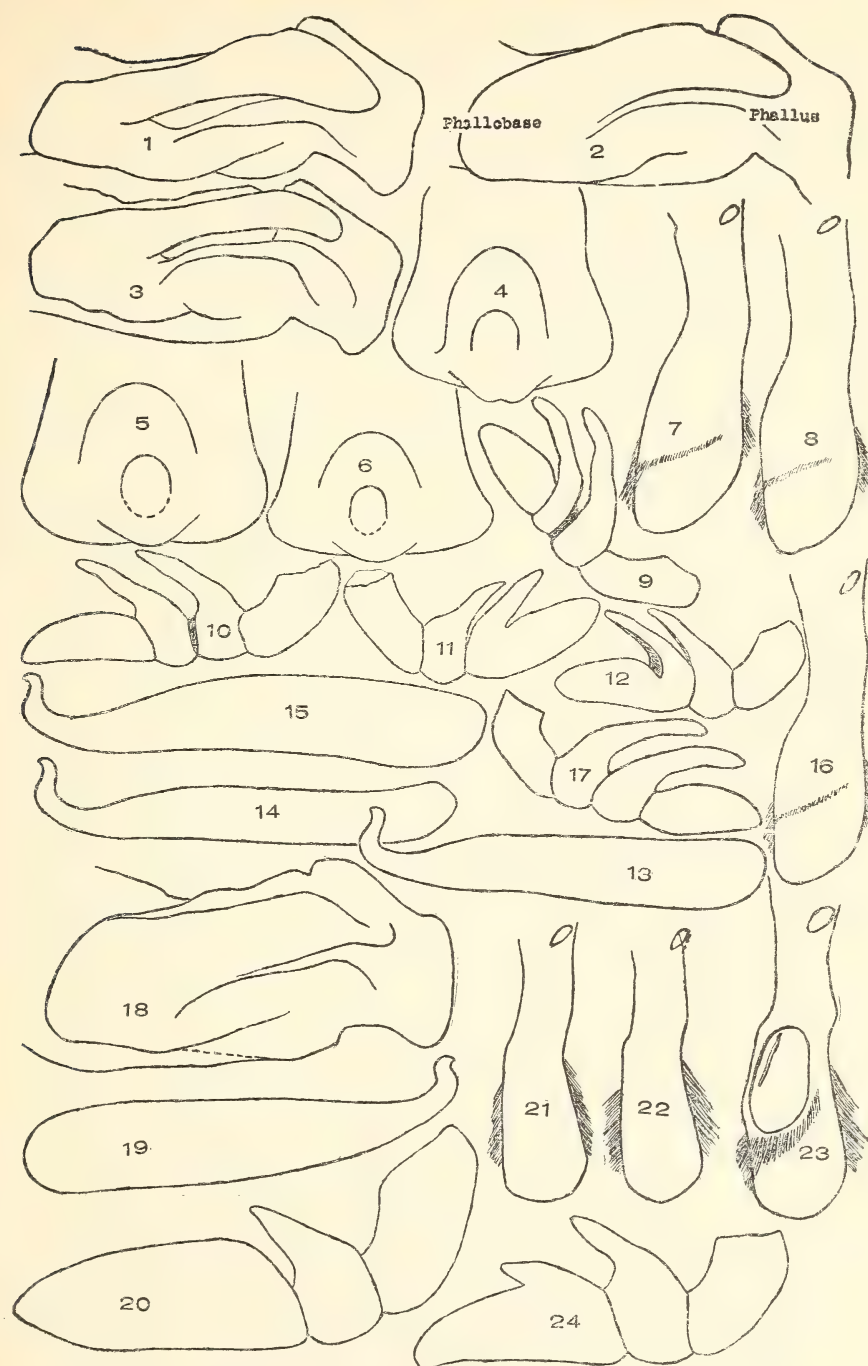


Fig. 1

(*Explicación al pie de pág. 72*)

tatus (Haldeman) como lo considera Menke en su trabajo, loc. cit. Tampoco por las características señaladas para *A. mayri* De Carlo, esta especie puede ser igual a *A. indentatus* (Haldeman), como lo señala Menke en su trabajo. Por la diferencia de la forma del harpagón y muy especialmente las características de la antena con sus segmentos curvados, *A. mayri* De Carlo, no puede ser igual a *A. hungerfordi*, como lo consideran Usinger y Menke, sin contar las otras diferencias ya señaladas. Son dos especies bien distintas, y ni tampoco sinónimas de *A. indentatus* (Haldeman), como lo indica Menke, loc. cit., pág. 427 y final de la pág. 428.

Estudio comparativo de A. montandoni, De Carlo, *A. anconai*, De Carlo y *A. dilatatus* Menke, *neoparatypus, para demostrar que son tres especies distintas.*

Antes de entrar a considerar el estudio comparativo, aclararé lo referente a *A. dilatatus.* Menke designó neotypus, neoallotypus y neoparatypi de una especie de *Abedus* basándose: en la procedencia de *dilatatus* Say; en el tamaño, y en algunas zonas rojizas del abdomen que cita el autor de dicha especie, en vista de que el tipo de la especie ha desaparecido. Menke dice: "The only facts given by Say that are of help are that the size was "one inch and one tenth", and "venter tinged with rufu fous". He cited the type locality as being between Jalapa and Vera Cruz, México". La especie que se tenía como *Abedus dilatatus* Say, ha sido considerada por Menke como una subespecie de *Abedus herberti* Hidalgo, la que llamó *utahensis.* Menke considera que esta subespecie, por él así denominada, no puede ser la *dilatatus* de Say, dado que no se halla en México, mientras que el tipo según la cita de Say, es de México.

Si fuese cierto que la especie que se tenía por *A. dilatatus* Say, no lo es, no podría considerarse como una subespecie de *herberti* Hidalgo, llamada *utahensis* por Menke, sino que debería ocupar el rango de especie, dado que tiene caracteres como la antena, con tres artículos bien delimitados, siendo el segundo visiblemente pequeño;

Referencias de la lámina 1

Fig. 1: genitalia de *Abedus mayri* De Carlo, paratypus; 2: ídem, de *A. hungerfordi* De Carlo, paratypus; 3: ídem, de A. *indentatus* (Haldeman); 4: aedeagus de *A. indentatus,* visto dorsalmente; 5: ídem, de *A. hungerfordi*; 6, ídem, de *A mayri*; 7: apéndice respiratorio de *A. hungerfordi* De Carlo, paratypus; 8: ídem, de *A. mayri*, paratypus; 16: ídem, de *A. indentatus;* 9: antena de *A. mayri*, paratypus macho; 10: ídem, de *A. hungerfordi,* paratypus macho; 11: ídem, de *A. indentatus,* macho; cara dorsal; 12: ídem, de *A. indentatus,* cara ventral. 17: ídem, de *A. mayri,* macho; 13: harpagón de *A. indentatus;* 14: ídem, de *A. mayri* paratypus; 15: ídem, de *A. hungerfordi,* paratypus; 18: genitalia de *A. drakei* De Carlo, holotypus; 19: harpagón de *A. drakei,* holotypus; 20: antena de *A. drakei* holotypus macho; 21: apéndice respiratorio, de *A. sta.i* De Carlo, holotypus hembra; 22: ídem, de *A. drakei,* allotypus hembra; 23: ídem, de *A. drakei,* holotypus macho; 24: antena de *A. herberti* Hidalgo, ejemplar que se halla en el Museo Argentino de C. Naturales determinado por Hidalgo.

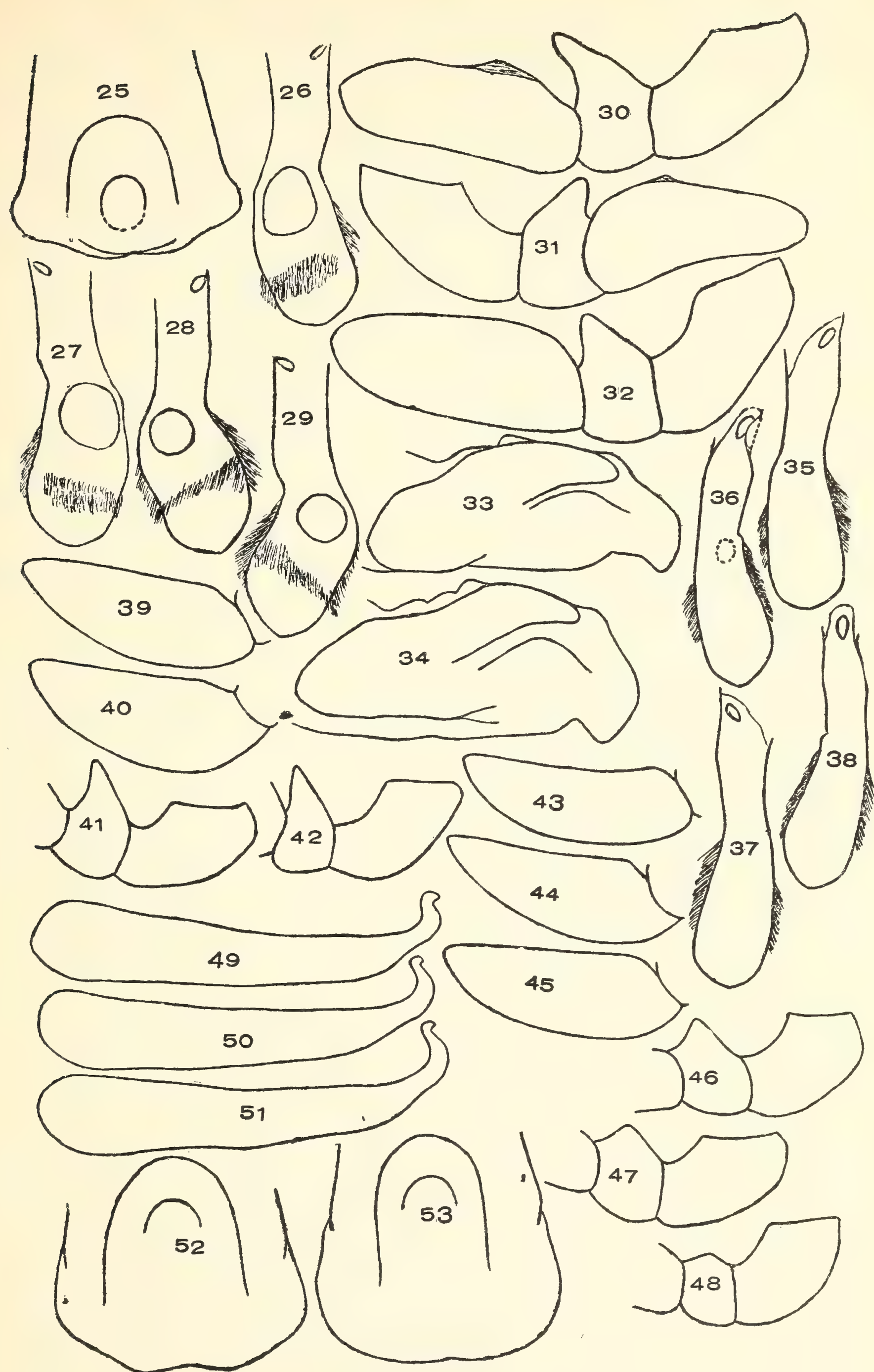


Fig. 25

(Explicación al pie de la pág. 74)

la placa metasternal fuertemente carenada a lo largo de la línea media, etc., que en nada la acercan a *A. herberti* Hidalgo.

Color de los hemiélitros. — En *A. montandoni* De Carlo, en los ejemplares descriptos, el color es pardo grisáceo bastante uniforme.

En cambio, en el ejemplar que tengo de *A. dilatatus* Menke, neoparatypis que me envió Menke en carácter de canje, tiene los hemiélitros casi oscuros, debido al gran número de manchas pequeñas negras que tienen los hemiélitros, las que dan a los mismos un color oscuro. Este carácter no se observa en ninguno de los diez ejemplares de *A. montandoni* que he descripto.

En dos fotografías de gran tamaño que da Menke en su trabajo, loc. cit., láminas 57 y 58 de *A. dilatatus* Menke, pueden apreciarse la gran cantidad de manchas negras que tienen los hemiélitros, las que dan a las mismas un color bastante oscuro.

En *A. anconai* De Carlo, el color de los hemiélitros es castaño muy uniforme, de tinte distinto al señalado para *A. montandoni* De Carlo y *A. dilatatus* Menke.

Abdomen. — En *A. montandoni* De Carlo y en *A. anconai* De Carlo, la pubescencia es de color canela, con algunas pequeñas zonas rojizas; en *A. dilatatus* Menke, es bien negra, con algunas pequeñas zonas rojizas, como la señala Menke en su trabajo.

Genitalia. — En *A. dilatatus* Menke, la parte anterior del aedeagus es más saliente, fig. 34 y más robusta, que el aedeagus de *A. montandoni* De Carlo, fig. 33. Visto por la parte dorsal el aedeagus de *A. dilatatus* Menke, fig. 52, al dibujarlo forma una entrada algo profunda, cosa que no se observa al dibujar por la parte dorsal el aedeagus de *A. montandoni* De Carlo, fig. 53.

No represento la genitalia ni los apéndices respiratorios de *A. anconai* De Carlo, porque el único macho que tengo no tiene esas piezas.

En cuanto a los harpagones son muy semejantes, pero un poco

Fig. 25: aedeagus de *Abedus drakei* De Carlo, visto dorsalmente; 26 y 27: apéndices respiratorios de *Abedus dilatatus* Menke, neoparatypus; 28 y 29: ídem, de *A. montandoni* De Carlo, paratypus; 30: antena de *A. drakei* De Carlo, hembra, allotypus; 31 y 32: antenas de *A. stali* De Carlo, holotypus hembra; 33: genitalia de *A. montandoni* De Carlo, paratypus; 34: genitalia de *A. dilatatus* Menke, neoparatypus; 35 y 37: apéndices respiratorios de *A. anconai* De Carlo, paratypus hembra; 36 y 38, apéndices respiratorios de *A. montandoni,* paratypus hembra; 39: tercer segmento de la antena de *A. montandoni,* paratypus macho; 40: tercer segmento de *A. dilatatus Menke,* neoparatypus; 41: segundo segmento de la antena de *A. montandoni,* paratypus macho; 42: ídem, de *A. dilatatus* Menke, neoparatypus macho; 43: tercer segmento de la antena de *A. anconai,* holotypus macho; 44: ídem, de paratypus hembra; 45: ídem, de *A. montandoni,* paratypus hembra; 46: segundo segmento de la antena de *A. montandoni,* paratypus hembra; 46: segundo segmento de la antena de *A. montandoni,* paratypus hembra; 47: ídem, de *A. anconai,* holotypus macho; 48: segundo segmento de *A. anconai,* paratypus hembra; 49: harpagón de *A. dilatatus* Menke, neoparatypus; 50 y 51: harpagones de *A. montandoni,* paratypi; 52: aedeagus de *A. dilatatus* Menke, neoparatypus, visto dorsalmente; 53: aedeagus de *A. montandoni,* paratypus, visto dorsalmente.

más largo el cuello y más doblado hacia atrás en *A. montandoni*, figs. 50 y 51. La fig. 49, representa el harpagón de *A. dilatatus* Menke, neoparatypus.

Apéndices respiratorios. — En *A. montandoni* De Carlo, paratypus, figs. 28 y 29, los apéndices respiratorios son un poco más cortos y menos alargados que los apéndices respiratorios de *A. dilatatus* Menke, neoparatypus, figs. 26 y 27.

Doy dibujos de *A. anconai* De Carlo, paratypus hembra, de los apéndices respiratorios y de *A. montandoni* De Carlo, paratypus hembra, para hacer ver la diferencia que hay entre ellos, en cuanto a la forma de esta pieza. Las figs. 35 y 37, representan los apéndices respiratorios derecho e izquierdo de *A. anconai* De Carlo, hembra; las figs. 36 y 38, representan los apéndices derecho e izquierdo, de *A. montandoni* De Carlo, hembra. Comparando, pueden apreciarse las diferencias.

Conclusión. — *A. montandoni* De Carlo, no puede ser igual a *A. dilatatus* Menke, por el color de la vellosidad sedosa; por la gran cantidad de manchas negras sobre los hemiélitros en *A. dilatatus* Menke, las que le dan a los mismos un color bastante oscuro (ver láms. 57 y 58 del trabajo de Menke, que son dos grandes fotografías, loc. cit.); por la forma distinta de los apéndices respiratorios; por tener el aedeagus menos robusto y menos saliente *A. montandoni* De Carlo; por los harpagones, que son de cuello más largo y menos doblados hacia atrás, en *A. montandoni*.

Por las mismas razones *A. anconai* De Carlo, no puede ser igual a *A. dilatatus* Menke, aún teniendo en cuenta que los caracteres que se dan de *A. anconai*, corresponden a una hembra.

A. anconai De Carlo, se diferencia especialmente de *A. montandoni* De Carlo, por el color (ya fue indicado); forma del cuerpo, dado que es bastante regularmente oval en *anconai*; forma de los apéndices respiratorios, comparada en hembras (ver dibujos) y en *A. anconai*, el segundo segmento antenal tanto en el macho como en la hembra, figs. 47 y 48, es visiblemente menos aguzado y más corto que en *A. montandoni*, figs. 41 y 46.

Estudio comparativo de A. herberti Hidalgo, *A. drakei* De Carlo y *A. stali* De Carlo, *para demostrar que son tres especies distintas. Diferencias entre A. herberti* Hidalgo y *A. drakei* De Carlo. — Tengo un ejemplar macho de *A. herberti* Hidalgo, que me fue enviado por el Dr. Hungerford, a cambio de un ejemplar de *A. drakei* De Carlo. El ejemplar de *A. herberti* Hidalgo está etiquetado con letra manus-

crita por Hidalgo. No dice paratipo, no tiene la genitalia, ni los apéndices caudales. Es de la misma procedencia que el holotypus, allotypus y paratypi y coleccionado por el mismo colector, es decir: Tucson, Arizona, colector F. H. Snow.

Tamaño. — Es sumamente distinto, hay bastante desproporción, pues Hidalgo da para su especie, largo del cuerpo 29-30 mm; ancho 16,5 mm. En *Abedus drakei* De Carlo, las medidas que doy son: largo entre 35-35,5 mm; ancho, entre 18,6-19 mm.

También el tamaño de *A. herberti* Hidalgo, es desproporcionado con respecto al tamaño de *A. stali* De Carlo, siendo las medidas que doy de dos ejemplares hembras estudiados: long. del cuerpo 35-35,5 mm; lat. máx., 20-20,2 mm.

Abdomen. — En *A. stali* y en *A. drakei* De Carlo, la pubescencia es de color canela y no se observan zonas rojizas. En *A. herberti* Hidalgo, la pubescencia del abdomen presenta zonas rojizas.

Genitalia. — De *A. stali* De Carlo, no doy dibujo de la genitalia, porque hice la descripción en base a dos hembras, pero de *A. drakei* De Carlo doy la genitalia, figs. 18 y 25, las que tienen parecido a las que da Menke de su *A. herberti*, figs. 24 y 34, loc. cit.

Si fuera cierto que son iguales, esto no implica que *A. drakei* De Carlo, sea igual a *A. herberti* Hidalgo (si se refieren los dibujos que da Menke a la verdadera especie de Hidalgo), dado que, según Menke, hay especies del género *Abedus* que tienen la genitalia muy semejantes, como sucede con *A. stangei* Menke y *A. dilatatus* Menke, neoholotypus, según lo indica en su trabajo, pág. 427, loc. cit.

Antenas. — Comparando la antena macho, fig. 20 de *A. drakei* De Carlo, con la antena macho, fig. 24 de *A. herberti* Hidalgo, que tengo en la colección del Museo, se observa que son muy diferentes en la forma y tamaño. La antena de *A. herberti* Hidalgo, es de tamaño menor y tiene el tercer segmento una porción lateral que no se observa en el tercer segmento de *A. drakei* De Carlo.

La antena de *A. drakei* De Carlo, hembra, fig. 30, es distinta a la antena de *A. stali* De Carlo, hembra, figs. 31 y 32, especialmente por el tamaño del segundo segmento, que en *A. drakei* De Carlo, es más alargado.

Apéndices respiratorios. — He representado los apéndices respiratorios de *A. drakei* De Carlo, fig. 22, hembra y *A. stali* De Carlo, fig. 21, hembra, por no tener macho, como he dicho, de esta especie.

Como puede observarse, hay diferencias en la forma.

Conclusión. — *Abedus drakei* De Carlo, macho, que fue comparado con *herberti* Hidalgo, macho que tengo en la colección del Museo, son dos especies distintas y no sinónimas como dice Menke, pág. 421, loc. cit., por la forma y tamaño de las antenas; por la desproporción del tamaño en el largo y ancho, teniendo en cuenta las medidas que da Hidalgo en su trabajo, págs. 507-508, loc. cit.; por la forma de los apéndices respiratorios, fig. 13 a, del trabajo de Menke, comparada con fig. 23 del presente trabajo; por las características de la pubescencia del abdomen.

Tampoco *A. stali* De Carlo, puede ser sinónima de *A. herberti* Hidalgo, como lo considera Menke, dado el tamaño en ambas especies ya señalado; la característica de la pubescencia en ambas especies; por la forma de los apéndices respiratorios, comparando fig. 13 b, hembra del trabajo de Menke, con fig. 21 que doy en el presente trabajo, y por el tamaño y forma de la antena, que en *A. herberti* Hidalgo, tiene el tercer segmento una prolongación lateral.

Hechos los estudios comparativos para demostrar que mis especies no son sinónimas de otras, como dice Menke, daré la cita bibliográfica de cada una de ellas, donde fue publicada, los datos de procedencia y dónde se hallan los tipos. Los dibujos corresponden a holotypus o paratypus, exceptuando el dibujo 17, que es de un ejemplar recientemente recibido.

Abedus (Deinostoma) hungerfordi De Carlo

1932, *Abedus hungerfordi* De Carlo, Rev. Soc. Ent. Argentina, V: 123-124; lám V: 3-4.

Holotypus, allotypus y tres paratypi, en el Museo de la Univ. de Kansas, Estados Unidos; tres paratypi en la colección del Museo Argentino de C. Naturales, nº cat. 46734 y 46735, de la secc. Entomología.

Los ejemplares proceden de California, Estados Unidos.

Abedus (Deinostoma) mayri De Carlo

1948, *Abedus mayri* De Carlo, *Comunicaciones del Museo Argentino de C. Nat., serie Cien. Zoológicas*, nº 5, lám. II: 9; lám. III: 21.

Holotypus en el Museo de la Univ. de Kansas, Estados Unidos; dos paratypi machos en la col. del Museo Argentino de C. Nat., nº de cat. 46734 y 46735, de ta secc. Entomología.

Los ejemplares proceden: holotypus de Riverside, California; un paratypus de Nipone, California; el otro paratypus es de Clayton, California.

Abedus (Deinostoma) montandoni De Carlo

1932, *Abedus montandoni* De Carlo, *Rev. Soc. Ent. Argentina*, V: 121-123; lám. V: 5-6.

Holotypus, allotypus y seis paratypi, en la col. del Museo Argentino de C. Nat., nº de cat. 30432 de la secc. Entomología.

Procedencia de los ejemplares: Zinacantepec, México.

En carácter de canje, se envió un ejemplar hembra al Dr. Menke.

Abedus (Deinostoma) anconai De Carlo

1938, *Abedus anconai* De Carlo, *Rev. Soc. Ent. Argentina*, X: 43-45; láms. IV-V: 4, 5, 6.

Holotypus, allotypus y un paratypus, en la col. del Mus. Argentino de C. Nat., nº de cat. 43090 de la secc. Entomología; un paratypus hembra en la col. de la Univ. de Kansas, Estados Unidos; un paratypus hembra en la col. del Dr. Menke, en ambos casos enviados por canje.

Procedencia: México. No puedo precisar si los ejemplares fueron capturados en el lago Zinacantepec, Chapultepec o Xochimilco, porque el Prof. Ancona me dice en su carta de fecha 3 de octubre de 1933: "Le remito una caja conteniendo hemípteros acuáticos recolectados en los lagos Zinacantepec, Chapultepec y Xochimilco".

Abedus (Deinostoma) drakei De Carlo

1938, *Abedus drakei* De Carlo, *Rev. Soc. Ent. Argentina*, X: 41-43; láms. IV-V: 1, 2, 3.

Holotypus, allotypus y un paratypus en la col. del Museo Argentino de C. Nat., nº cat. 43068 de la secc. Entomología. Un paratypus se canjeó por un ejemplar de *A. herberti* Hidalgo. Se halla en la col. de la Universidad de Kansas, Estados Unidos.

Procedencia de los ejemplares: Huachuca, Arizona, Estados Unidos.

Abedus (Deinostoma) stali De Carlo

1948, *Abedus stali* De Carlo, *Comunicaciones del Mus. Argentino de C. Nat., serie Cien. Zoológicas*, nº 5, lám. II, fig. 15; lám. III, fig. 27; págs. 21-22.

Holotypus hembra en la col. del Mus. Argentino de C. Nat., nº de cat. 46440 de la secc. Entomología; un paratypus hembra, en el Depart. de Zoología del Iowa State College.

Procedencia: Huachuca, Arizona, Estados Unidos.

ESENCIAS DE PLANTAS AROMATICAS DEL PARQUE NACIONAL DE NAHUEL HUAPI Y SUS ALEDAÑOS

ADOLFO LEANDRO MONTES

I

Schinus crenatus Phil. Engler, o "Laura" y Adesmia boronivides, o "paramela"

Existen numerosas especies nativas aromáticas en el Parque Nacional de Nahuel Huapi, tanto en su parte húmeda y boscosa (zona occidental), como en la zona semidesértica oriental y su prolongación hacia Comallo.

Nuestro propósito ha sido estudiar los aceites esenciales y los resinoides aromáticos obtenidos de aquellas especies, entre las que se encuentran plantas arbustivas (paramela, varios senecios, neneo, baccharis, etc.), arbustos y árboles (laura, laurel, huan huan, canelo, sietecamisas, luma, patagua, etc.) y darlos a conocer para su posible utilización en perfumería, alimentos o medicina, así como su ulterior explotación agrícola.

Algunas especies han sido ya objeto de estudios químicos, en lo que a sus esencias se refiere; por ejemplo el huan huan ([1]) ([2]), el canelo ([3]) ([4]), el patagua ([3]), etc.

Cada especie será presentada por separado, con el nombre del colaborador del Dr. Montes en esta secuencia de estudios físico-químicos, en los que se han aplicado, en lo posible, las técnicas más modernas de análisis.

En la clasificación botánica de las especies estudiadas agradecemos la inestimable colaboración del profesor José F. Molfino, del Instituto de Botánica y Farmacología de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de Buenos Aires, de la Dirección y personal especializado del Instituto de Botánica Agrícola de INTA de Buenos Aires y del Dr. Angel L. Cabrera del Instituto del Museo de la Universidad de La Plata, quien ha estudiado particularmente la flora de esta zona.

1. SCHINUS CRENATUS PHIL. ENGLER O "LAURA"

MARGARITA C. GARCIA PADRON y ADOLFO LEANDRO MONTES

El Schinus crenatus Phil. Engler, es un árbol pequeño, de 2 a 4 metros de altura, de aspecto semejante a un limonero; con ramas cortas cenicientas y hojas semicoráceas, glabras, brillantes en el haz, con



peciolo caniculado por encima, de 6 a 15 mm de largo y con lámina elíptica aguda en el ápice y atenuada en la base, entera o crenada en la parte superior del margen, con nervadura central prominente y nervaduras laterales inmersas, de 20 a 45 mm de longitud y 15 a 25 mm de ancho. Flores masculinas con estambres de 1 a 2 mm de largo provistos de anteras semiorbiculares. Flores femeninas con estambres reducidos y ovario subgloboso con estilo muy corto y estigma capitado trilobado. Pétalos oblongos de 2,0 a 2,5 mm de longitud y 1 mm de ancho. Drupas globosas de 5 mm de diámetro, de color castaño-violado.

Pertenece a la familia de las Anacardiáceas (5), tribu Rhoideae, género Schinus.

Se lo encuentra desde Neuquén hasta el N. de Chubut y es abundante en el Parque Nacional de Nahuel Huapi, en la zona húmeda y boscosa.

El material usado para la extracción del aceite esencial fue recolectado en febrero de 1960 por personal de la Dirección Nacional de Parques Nacionales de la zona, a solicitud del Dr. Montes. Se recibieron en el laboratorio 20 Kg de ramas y hojas secas.

Para el estudio realizado fueron separadas las ramas y las hojas, con el propósito de estudiar por separado los aceites esenciales de unas y otras, ya que ambas son aromáticas y presentan distintos aromas.

La extracción de los aceites esenciales se hizo por arrastre con vapor de agua, a presión de $1\text{-}1^1/_2$ atmósferas y posterior rectificación por arrastre en agua salada a ebullición, a reflujo, recolectando los aceites esenciales en una trampa ASTM.

El rendimiento de la extracción fue bajo. De las hojas se obtuvo, a partir de 586 g, tan sólo 1,1 ml de aceite esencial (representa el 1,8 $^o/_{oo}$); en total se recolectaron, a partir de todo el material ml 8,4.

De las ramas, para g 1794,4 se obtuvieron 4,7 ml de aceite esencial; es decir, un 2,6 por mil.

a) Características físicas y químicas del aceite esencial de hojas (6)

Aspecto:	líquido oleoso transparente
Color:	ámbar
Olor:	pronunciado, muy agradable
Peso específico a 15°/15°C:	0,9686
Indice de refracción a 20°C:	1,4998

Espectrofotometría en el ultravioleta, usando solución alcohólica 1.10000: máximo a 274 milimu, que desaparece al eliminar los fenoles del aceite, por absorción en álcali.

Indice de ácido:	13,05
Indice de éster:	99,9

Fenoles (absorción en HOK al 5 %):	8,2 %
Componentes carbonílicos (separados con reactivo Girard T):	contiene aldehido y cetonas

Cromatografía gaseosa: usando el cromatógrafo Perkin Elmer, mod. 154C y dos fases fijas: el "saib" (diacetatohexaisobutirato de sacarosa) sobre tierra de diatomeas purificada, en columna de 1/4 de pulgada y dos metros de longitud y succinato de polietilenoglicol sobre "chromosorb" (columna P de Perkin Elmer) en columna de 1/4 de pulgada y un metro de largo. Con saib se trabajó a 150°C con flujo de 15,8 ml/min (presión de nitrógeno de 2,5 psi) obteniéndose un cromatograma muy extenso, de 24 pulgadas, con ocho picos; y a 200°C con flujo de nitrógeno de 13,1 ml/min (presión de 3 psi), con 12 picos en ocho pulgadas. Usando la columna P se trabajó a 125°C y 23,7 ml/min de flujo de nitrógeno (presión de 4 psi) obteniéndose en 15 pulgadas de desarrollo 18 picos; a 150°C con un flujo de 21,6 ml/min de nitrógeno (presión de 4 psi) en 10 pulgadas se obtuvieron nueve picos. El mejor cromatograma es el obtenido con columna P a 125°C y fue repetido trabajándose en la identificación y ubicación de los componentes. También fue útil, para los componentes pesados el obtenido con saib a 200°C. Se transcriben ambos.

Separación de los componentes y reacciones de identificación.

1. Fenoles. — Fueron separados por absorción en HOK al 5 %, liberados y luego se preparó el 3-5-dinitrobenzoato [7]. Se obtuvo un derivado con temperatura de fusión 108°C, que correspondería al 0-Etil-fenol y estaría ubicado en el pico 10 en la cromatografía gaseosa con saib a 200°C.

El 0-Etilfenol fue confirmado en la cromatografía gaseosa en columna P a 150°C obteniéndose un pico con Tpo de retención 24,1 min, ubicación idéntica a la obtenida en iguales condiciones para 0-Etilfenol puro.

Componentes carbonílicos. — Fueron separados del aceite esencial mediante reacción con reactivo Girard-T [8]. De la masa obtenida fue separada, por descomposición del complejo mediante ácido mineral, la mezcla de cetonas. El complejo no descompuesto, una vez retiradas con éter las cetonas, se trató con ioduro mercúrico, obteniendo un precipitado de pto de fusión 138°C y color parduzco, que posterior-

mente aplicando la cromatografía gaseosa se comprobó correspondía a furfuraldehido.

En lo que a las cetonas se refiere poseía un olor agradable vinculado al del aceite esencial y un índice de refracción de 1,5150 a 20°C, lo que correspondería a una cetona sesquiterpénica o a una mezcla de cetonas terpénicas y bencénicas. La cromatografía gaseosa conducida en columna P y las reacciones efectuadas al eluir cada pico demostraron la presencia, además del furfural, con un pico muy grande y pequeña cantidad de nonilaldehido y de decilaldehido, de una cetona con pico grande y reacción muy intensa (pico n° 15), otra menor (pico n° 14) y otra más alejada, de olor graso (pico n° 16). La correspondiente al pico n° 14 posee olor canfóreo y coincide en tiempo de retención con la del aceite de sándalo oriental (santenona?).

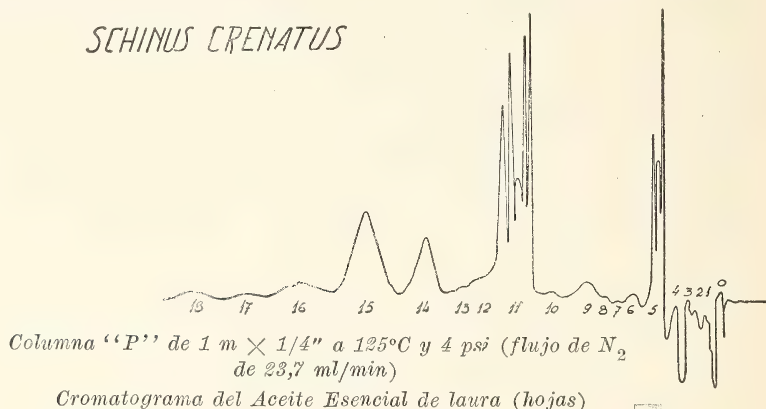
Componentes del aceite esencial de hojas encontrados por cromatografía gaseosa usando columna P de 1/4" × 1 m, a 125°C y 4 psi (flujo de nitrógeno 23,7 ml/min)

Pico	*Tamaño*	*Tpo Ret. en min.*	*Reacción*	*Componente*
1°	pequeño	0,5	Der. brom.: pos.	
2°	pequeño	1,0	Der. brom.: pos.	
3°	pequeño	1,6	Der. brom.: pos.	α Pineno
4°	pequeño	2,2	Der. brom.: pos.	Limoneno
5°	muy grande	3,4	Ester: positivo	Acetato de tuyilo?
6°	pequeño	4,7		
7°	muy pequeño	5,8		
8°	muy pequeño	6,3	Carboníl: pos.	Nonanal
9°	peq.-mediano	7,3		
10°	muy pequeño	9,1	Carboníl: pos.	Decanal
11°	muy grande	11,8	Carboníl. f. pos.	Furfural
12°	peq.-mediano	12,7		
13°	pequeño	14,0		
14°	mediano	16,0	Carboníl: pos.	Santenona?
15°	med.-grande	19,2	Carboníl: f. pos.	Carvotanacetona?
16°	med.-grande	23,4	Carboníl: fuerte	Metilnonilcetona
17°	peq.-ancho	26,6		
18°	peq.-chato	28,8		

El componente carbonílico correspondiente al pico 15° dio, por reacción con 2-4-dinitrofenilhidrazina un derivado rojizo de pto de fusión 190-192°C; sustancias carbonílicas que den ese derivado con igual pto de fusión se han encontrado tabuladas la carvotanacetona y el alfa tolualdehido, cuyos tiempos de retención por cromatografía serían del orden del de nuestro componente. Cetona aromática no puede ser ya que la acetofenona, la primera, tiene un tiempo de retención mayor.

El componente carbonílico del pico 16° coincide con el del aceite esencial de ramas y correspondería a la metilnonilcetona.

El componente del pico 8° corresponde a aldehido nonílico normal y el pico 10° a decanal, por sus tiempos de retención comparados con

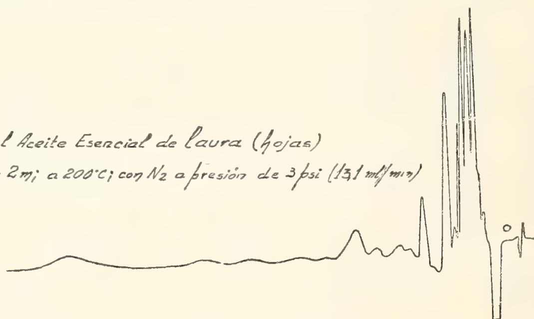


Columna "P" de 1 m × 1/4" a 125°C y 4 psi (flujo de N_2 de 23,7 ml/min)

Cromatograma del Aceite Esencial de laura (hojas)

el de las sustancias puras cromatografiados en iguales condiciones. Su proporción en el aceite es muy pequeña.

Esteres y alcoholes. — La proporción de ésteres de acuerdo con el índice de reposición es bastante alta (35 % en acetato de tuyilo); no se pudo determinar si había alcoholes libres pues la pequeña can-



tidad de muestra disponible no permitió aplicar el método de valoración. Se saponificó el aceite libre de fenoles y carbonílicos y se preparó como derivado para la identificación el 3-5-dinitrobenzoato [10] obteniendo un derivado de pto de fusión 102°C. El alcohol terpénico con derivado de pto de fusión similar sería el alcohol tuyílico (106°C) y el éster acetato de tuyilo. Coincide el pico grande de éster (pico 5° del cromatograma transcripto) con el pico del aceite de Thuja gigantea estudiado por Montes.

Hidrocarburos. — Se obtuvieron derivados bromados de los componentes de los picos 3° y 4°, cuyos tiempos de retención corresponden al alfaPineno y al limoneno cromatografiados en iguales condiciones.

Se aplicó también la cromatografía en placa recubierta con ácido silícico adicionado de un 10 % de almidón como ligante (9), desarrollando en forma ascendente con una mezcla de éter de petróleo 85: acetato de etilo 15. Se aplicó en forma directa sobre unas 100 gammas del aceite de hojas y luego reveló la ubicación de los componentes carbonílicos mediante rociado con solución de 2-4-dinitrofenilhidrazina en ClH 2N. Se hizo correr en paralelo carvona, furfural y esencia de sándalo oriental.

Se obtuvieron así ocho manchas (dos componentes más que los carbonílicos ubicados mediante reacción en la cromatografía gasíquido), con los siguientes Rf:

1a. mancha (la inferior)	anaranjada:	Rf	0,11	
2a.	rojiza		0,37	es la más intensa
3a.	anaranjada		0,53	
4a.	anaranjada		0,65	
5a.	amarilla-anaranj.		0,74	
6a.	anaranjada		0,80	
7a.	anaranjada		0,86	
8a.	amarilla		0,97	
En paralelo:	para la carvona		0,74	
	furfural		0,35	
	para esencia de sándalo Missore tres manchas con estas características:			
	inferior amarilla claro grande		0,55	
	intermedia anaranjada		0,80	
	superior anaranjada tenue		0,85	

La presencia de furfural quedó también rotundamente confirmada con esta técnica. La segunda mancha del sándalo oriental coincidió con la 6a. de la laura (santenona?). La quinta mancha de la laura coincidió en Rf, no en color con la carvona; probablemente se trate de la otra cetona que se supone carvotanacetona. La primera mancha coincide con la de la vainillina, cuya presencia no se descarta en la laura.

b) Características físicas y químicas del aceite esencial de ramas.

Aspecto:	líquido oleoso límpido
Olor:	intenso muy agradable
Color:	amarillo

Peso específico: 0,9099 a 15,5°C
Indice de refracción: 1,4902 a 20°C
Absorción en el ultravioleta, en solución alcohólica 1:10000: no presenta máximos.
Indice de ácido: 8,1
Indice de éster: 51,6
Componentes carbonílicos: contiene aldehidos y cetonas.
Hidrocarburos: contiene varios.

Cromatografía gas-líquido. — Se aplicaron las siguientes fases fijas: "SAIB" al 10 % sobre tierra de diatomeas (columna de 1/4″ × 2 m); Ucon LB-550-X (polipropileno glicol de PM aprox. 550) y polisuccinato de dietileno glicol sobre chromosorb (col P de 1 m × 1/4″, de Perkin Elmer). Usando SAIB a 150°C y nitrógeno a 2,5 psi (flujo 16,1 Kl/min) se obtuvo un cromatograma de doce pulgadas con 13 picos.

Usando col. P, a 125°C, con N_2 a 4 psi (flujo de 23,7 ml/min) se obtuvo cromatograma de 13 pulgadas con 13 picos.

Con Ucon LB-550-X en columna de 2 m × 1/4″, a 195°C, con N_2 a 7 psi (flujo de 18,5 ml/min) se obtuvo cromatograma de 26 pulgadas, con 15 picos.

Se transcribirán dos cromatogramas para mejor ilustrar el estudio.

Separación de componentes para su identificación.

1. Fenoles. — En el aceite de ramas la proporción de fenoles es muy pequeña y no se pudieron preparar derivados para su identificación.

2. Carbonílicos. — Fueron separados del aceite mediante reactivo Girard P (no se disponía más del T) ([11]). El complejo fue tratado con ácido mineral para separar las cetonas. Adicionando al resto ioduro mercúrico dio precipitado lo que indica hay aldehidos. Los derivados obtenidos con el reactivo Girard P no permiten por su punto de fusión muy próximo la identificación del aldehido.

De la cetona o mezcla de cetonas separada, se obtuvo una semicarbazona con pto de fusión 220°C y 2-4-dinitrofenilhidrazona con pto de fusión 90-93°C.

Practicando reacción de carbonílicos sobre los componentes eluidos en el curso de la cromatografía gaseosa se encontró reacción positiva en tres casos: coincidiendo los tres con otros componentes del aceite de hojas: la decilaldehida, la santenona (?) y otra cetona más pesada, quizás la metil-nonilcetona, ya que se preparó un 2-4-dinitrofenilhidrazona que dio pto de fusión 62°C, siendo para aquella el tabulado de 63°C; también la ubicación en el cromatograma correspondería.

Absorción en el ultravioleta de los Aceites esenciales de hojas y de ramas y de las cetonas y sus semicarbazonas del aceite esencial de ramas. Soluciones en etanol puro

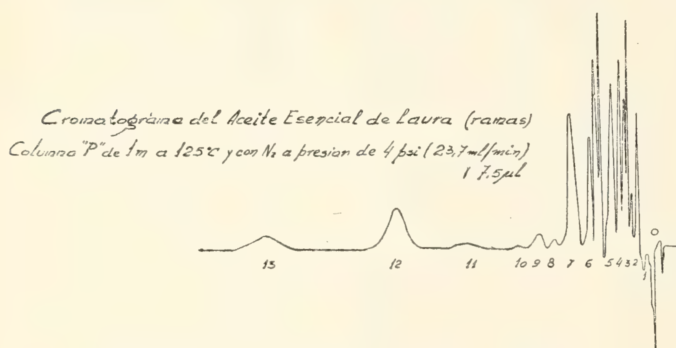
Longitud de onda milimu	*Ac. Esencial hojas sol. 1°/ooo*	*Ac. Es. Hojas sin fenoles sol. 1 °/ooo*	*Ac. Esencial ramas sol. 1 °/ooo*	*Cetona Ac. ramas sol. 2 °/ooo 2-4dinitro-fenilhidr.*	*Semicarbazona Cetona sol. 2 °/ooo*
215	—	—	—	1,02	0,58
218	—	—	—	1,03	0,61
20	1,06	1,56	0,74	1,03	0,60
25	0,96	1,38	0,555	1,03	0,435
30	0,82	1,14	0,466	1,00	0,34
35	0,64	0,84	0,42	0,94	0,28
40	0,53	0,64	0,39	0,90	0,29
45	0,53	0,54	0,37	0,87	0,30
50	0,63	0,47	0,35	0,87	0,293
55	0,78	0,44	0,325	0,865	0,28
60	0,99	0,40	0,295	0,84	0,24
65	1,20	0,375	0,265	0,78	0,18
70	1,36	0,36	0,225	0,70	0,13
272	1,40	0,357	0,213	—	—
74	1,415	0,356	0,202	—	—
76	1,40	0,351	0,185	0,61	0,10
80	1,30	0,341	0,16	0,535	0,084
85	1,075	0,32	0,13	0,463	0,073
90	0,76	0,298	0,10	0,435	0,065
95	0,515	0,275	0,068	0,41	0,058
300	0,333	0,247	0,0585	0,368	—
05	0,21	0,213	0,050	0,335	—
10	0,135	0,183	0,041	0,328	0,070
20	0,075	0,15	0,037	0,392	0,080
30	0,056	0,127	0,028	0,56	0,084
40	0,036	0,102	0,019	0,80	—
350	0,026	0,090	0,012	1,07	—

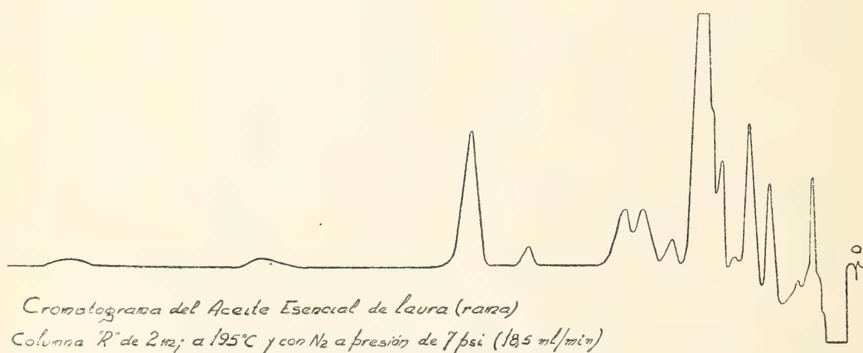
Nota. La absorción para la 2-4dinitrofenilhidrazona de la cetona del aceite esencial de ramas sigue así: 360 milimu: 1,32; a 370: 1,46; a 375: 1,48; a 378: 1,49 (máximo); a 380: 1,48 y a 390: 1,40.

Nota 2. El espectrofotómetro Carl Zeiss PMQ-II empleado para efectuar estos estudios, así como el cromatógrafo de gases Pelkin Elmer, modelo 154-C, fueron adquiridos mediante subsidio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

Cromatografía gas-líquido del aceite esencial de ramas, en columna P de 1/4″ × 1 m, a 125°C y 4 psi de presión (flujo de nitrógeno 23,7 ml/min.)

Pico	*Tamaño*	*Tpo Ret. en min.*	*Reacción*	*Componente*
1°	pequeño	0,5		
2°	mediano	0,9	Der. brom.: +	
3°	pequeño	1,3	Der. brom.: +	
4°	muy grande	1,7	Der. brom.: +	Pineno (α)
5°	med.-grande	2,2	Der. brom.: +	Limoneno
6°	muy grande	3,3	Ester: +	
7°	med.-grande	4,7		
8°	pequeño	6,2	Carbonil: +	Nonanal
9°	pequeño	7,4		
10°	muy pequeño	9,0	Carbonil: +	Decanal
11°	pequeño	12,8		
12°	grande	16,2	Carbonil: +	Santenona?
13°	mediano	23,6	Carbonil: +	Metilnonilcetona





En lo que respecta a la posible santenona, por burbujeo del eluido del pico correspondiente en sol. hidroalcohólica de sulfato de 2-4-dinitrofenilhidrazina se obtuvo un precipitado, que dio pto de fusión

107-110°C; pero no hay datos sobre este derivado de la santenona. En cambio, para la beta-santenona se da una semicarbazona de pto de fusión 222-223°C. En nuestro caso de la mezcla de cetonas separadas por Girard P, se obtuvo una semicarbazona de pto de fusión 220°C que podría corresponder a aquella cetona.

Por otra parte la curva de absorción en el ultravioleta obtenida para la 2-4-dinitrofenilhidrazona de las cetonas separadas por reactivo Girard corresponde también a una mezcla de cetona alifática y terpénica cíclica saturada ([12]).

También el pico 8° del cromatograma transcripto da reacción de carbonílico y posee olor de aldehido graso, correspondiendo el tiempo de retención con el del nonaldehido normal (6,3 para sustancia pura en iguales condiciones de cromatografía).

En este aceite no se encontró furfural, componente importante del de hojas, pero sí muy pequeña cantidad de aldehido decílico; parece haber otro aldehido, pero no ha sido identificado.

Esteres y alcoholes. — Los alcoholes fueron separados previa saponificación del aceite libre de carbonílicos. Dada la pequeña cantidad de muestra no pudo verificarse la presencia y tenor en alcoholes libres, aunque se supone presentes aunque no en alto porcentaje. El o los alcoholes separados se trataron con cloruro de 3-5-dinitrobenzoilo y obtuvo un precipitado con pto de fusión 92°C, que podría corresponder al iso-tuyílico (en el caso del aceite de hojas correspondía al 1-tuyílico). El éster podría ser el acetato de tuyilo (iso) con igual ubicación en el cromatograma (pico 6° de la tabla de valores transcripta) y que coincide con la ubicación de un pico similar presente en el aceite esencial de Thuja gigantea estudiado por Montes.

Hidrocarburos. — Dos hidrocarburos, presentes en el aceite han sido identificados con ayuda de la cromatografía gaseosa. Son el alfa-Pineno y el Limoneno (picos 4° y 5° del cromatograma en columna P transcripto). Se prepararon derivados bromados de los eluidos respectivos, obteniéndose uno con pto de fusión 105°C para el 5°, que corresponde al del limoneno; también corresponde el tiempo de retención, comparado con el de limoneno puro cromatografiado en iguales condiciones. En cuanto al 4° pico, dio un derivado bromado, de pto de fusión de 54°, lo que indica la no saturación y ayuda a su identificación, ya que por otra parte su tiempo de retención coincide con el del alfa-Pineno en iguales condiciones.

RESUMEN DE LAS CARACTERISTICAS Y COMPOSICION DE LOS ACEITES ESENCIALES OBTENIDOS DE HOJAS Y DE RAMAS DEL SCHINUS CRENATUS PHIL ENGLER

Característica	*Ac. Es. de hojas*	*Ac. Es. de ramas*
Rendimiento	1,1 por mil	2,6 por mil
Aspecto	líquido oleos transp.	líquido oleoso
Color	ámbar	amarillo
Olor	fuerte muy agradable	fuerte muy agradable
Peso específico	0,9686 a 15°/15°C	0,9099 a 15,5°C
Indice de refracción	1,4998 a 20°C	1,4902 a 20°C
Indice de ácido	13,05	8,1
Indice de éster	99,9	51,6
Fenoles:	8,2 %	muy pequeña cantidad
Carbonílicos	aldehidos y cetonas	aldehidos y cetonas
Absorción en ultravioleta	máximo a 274 milimu	no acusa máximo neto
Cromatografía gaseosa:		
a) Columna "P" a 125°C	18 componentes	13 componentes
b) Columna "R" a 195°C	—	15 componentes
c) Columna "SAIB" a 200°C	15 componentes (uno muy pesado distinto a los registrados con la columna "P"	—
COMPONENTES:		
Hidrocarburos:	alfa Pineno	alfa Pineno
	Limoneno	Limoneno
Aldehidos:	Furfural	
	Nonílico normal	Nonílico normal
	Decílico normal	Decílico normal
Cetonas:	beta Santenona?	beta Santenona?
	metilnonilcetona	metilnonilcetona
	carvotanacetona?	
Fenoles:	orto-Etilfenol	
Esteres:	Acetato de tuyilo?	Acetato de isotuyilo?

En los dos aceites esenciales existen doce componentes iguales (véase el cuadro anterior y los cromatogramas transcriptos; el de hojas contiene furfural, o-etilfenol y una cetona (carvotanacetona?) que no se encuentran en el de ramas (quizás el mismo fenol en muy pequeña cantidad).

Conclusiones.— Los aceites esenciales obtenidos de las hojas y de las ramas del Schinus crenatus Phil Engler, conocido en su habitat original como "laura" son ambos, de aroma muy agradable, que lo hace aptos para su uso en perfumería; son de composición compleja, en parte develada en este estudio, merced a la aplicación de técnicas químicas y sobre todo la técnica física de reciente aplicación, la cromatografía gaseosa, usando distintas fases fijas y condiciones de cromatografía y en combinación con reacciones químicas, según se explica en el texto. Podría emplearse directamente el aceite esencial de hojas y ramas mezclados, ya que el producto resultante es también de muy agradable aroma. Es de lamentar el escaso rendimiento en aceite, que quizás mejorara en cultivo de la especie en mejores condiciones.

2. ADESMIA BORONOIDES HOOKER, O "PARAMELA"

ADOLFO LEANDRO MONTES Y LEONOR PELTZ

La Adesmia boronioides Hooker pertenece al género Patagonium, exclusivamente sudamericano, que comprende más de 120 especies. Pertenece a la familia Leguminosas, orden Rosales, sub-clase Arquiclamídeas y clase Dicotiledóneas.

Según Burkart ([13]) pertenece a la tribu de las Soforeas, subtribu Patagoniineas Taubert.

Se trata de una planta sufrutescense quebradiza, muy glabra, de tallo de 30 a 40 cm, poco leñoso, articulado y con muchas glándulas a modo de verrugas, que segregan una resina amarilla. Sus ramas son ascendentes y cilíndricas, del grueso de una pluma de cuervo y de 18 a 23 cm de largo. Sus hojas miden de 3 a 5 cm de largo, con grueso pecíolo y 10 a 15 pares de hojuelas alternas u opuestas, orbiculares trasaovadas, de 2 a 5 mm de largo groseramente dentadas, amarillentas, coriáceas y con glándulas gruesas en los márgenes, estípulas algo aparentes, cortas casi abrazadoras y estipelas ausentes. Racimos laterales y terminales obtusos de 7 a 10 cm de largo, algo vellosos, hacia arriba y compuestos de flores cortamente oblongas, con pedicelos más cortos que el cáliz, que es ancho y campanulado, con 5 dientes o lóbulos y cortamente quinquéfido, algo pubescente y tres veces más corto que el estandarte que es muy glabro. Legumbre ampliamente oval, muy comprimida, compuesta de tres artículos algo separados unos de otros y punteada de gruesas glándulas negruzcas.

Ecológicamente son criófilas y mesófilas y numerosas especies son xerófilas.

La paramela crece en la zona central de Chile y región sudoccidental de la Argentina, su habitat natural; especialmente en terrenos elevados ([14]) ([15]). Su nombre araucaco es "yaqueu" y localmente se le concede valor medicinal, empleándose como saumerio para las vías respiratorias y también como agente digestivo.

La muestra analizada fue proporcionada por la Dirección del Parque Nacional de Nahuel Huapi, por intermedio del ingeniero Demetrio Havrylenko y a solicitud del Dr. Montes, quien había recolectado algunas ramas en su visita a la zona en enero de 1960. La recolección del material enviado fue realizada en febrero del mismo año.

Se decidió hacer la extracción de los resinoides de las hojas y de las ramas, por separado, para establecer el rendimiento en uno y otros, determinando luego sus caracter'sticas, contenido en aceite esencial y las características de éste.

Un primer ensayo de extracción, empleando éter etílico, dio un rendimiento de tan sólo 3,2 % de resinoide aromático de color amarillo.

Se ensayó entonces como disolvente alcohol de 95°GL, obteniendo entonces un rendimiento mucho mayor, motivo por el cual se decidió emplear este disolvente en la extracción de los resinoides.



ESTUDIO EXPERIMENTAL

A. Estudio de los resinoides

Previamente a la extracción se determinó la humedad en el material recibido, mediante arrastre con toluol y recolección en trampa Dean Stark. Se obtuvo:

en ramas: 12,5 %
en hojas: 11,3 %

Luego se procedió al molido de las ramas y triturado de las hojas, por separado, se pesaron y efectuó la extracción con etanol de 95°GL, a reflujo.

Material	*Rendimiento*	*Resinoide*
a) Hojas	23,0 %	sólido pastoso, aromático de color pardo.
b) Ramas	12,0 %	sólido pastoso, aromático de color pardo verdoso.

Observación. El disolvente fue separado después de enfriar y filtrar el producto de extracción, por destilación a presión reducida y con columna para evitar la pérdida de aceite esencial.

De los resinoides fueron separados los absolutos, por dilución en alcohol de 95°GL seguida de enfriamiento en heladera y filtración en frío [17]. Los residuos cerosos insolubles representan:

para el resinoide de hojas el 16,17 %
y para el resinoide de ramas el 11,92 %

Finalmente de los absolutos, por arrastre con vapor de agua fueron separados los aceites esenciales. El rendimiento en aceites esenciales fue, con referencia al material original:

aceite esencial de hojas 2,52 %
aceite esencial de ramas 1,01 %

De ambos resinoides se determinó la absorción en el ultravioleta, empleando soluciones 1 en 10.000 en etanol puro y usando un espectrofotómetro Carl Zeiss PM-Q II (adquirido para la Facultad de Ciencias E. y N. por el Consejo Nacional de Inv. Científicas y Técnicas).

El espectro del resinoide de hojas no presentó máximos notables; en el del resinoide de ramas se observó un máximo a 270 milimu, lo que indicó la presencia de componentes bencénicos, probablemente fenoles. En efecto, mediante solución de HOH al 5 % fueron extraídos los fenoles, en la proporción del 10,13 por ciento con respecto al resinoide.

Los componentes fenólicos fueron estudiados por cromatografía sobre placa de vidrio recubierta de ácido silícico ([17]). Se usó éter etílico como disolvente para depositar los fenoles sobre la placa y una mezcla de éter de petróleo (de temp. eb. 60°-70°C) con acetato de etilo, en la proporción 7:3 para el desarrollo. Como reactivo para el revelado se empleó p-nitroanilina diazotada haciendo un corrimiento paralelo con fenol, como sustancia patrón de comparación. Se obtuvieron cuatro manchas, a saber:

1a. de color violeta, con halo amarillo y Rf 0,7
2a. de color amarillo parduzco Rf 0,55
3a. de color amarillo Rf 0,154
4a. de color anaranjado Rf 0,077

Las dos manchas superiores corresponden a fenoles monohidroxilados; una coincide con la del fenol, la superior con eugenol o isoeugenol, más probablemente (halo amarillo) o-cresol. Las manchas inferiores corresponden a fenoles polihidroxilados ([18]) o con función mixta, como la vainillina.

Se determinaron también los índices de ácido y de éster de los dos resinoides, obteniéndose:

Determinación	*Resinoide de hojas*	*Resinoide de ramas*
Indice de ácido	38,8	17,1
Indice de éster	5,85	82,8

Es decir que el resinoide de hojas tiene mayor índice de ácido (ácidos libres) y mucho menor índice de éster que el resinoide de ramas, el que a su vez contiene más del 10 % de componentes fenólicos, ausentes en el de hojas.

B. Aceite esencial de hojas

Características físicas y químicas

Aspecto: líquido oleoso límpido
Color: pardo rojizo
Olor: sui géneris frutal

Peso específico a 20°C: 1,0031
Indice de refracción a 20°C: 1,4930
Absorción en ultravioleta, sobre solución en etanol puro (1 °/ooo):
presenta un máximo neto a 235 milimu
Indice de ácido: 44,2
Indice de éster: 79,3

Alcoholes (Fiore):	4,48 % en -OH alcohólico
Fenoles:	no contiene
Carbonílicos:	contiene

Nota. Observando los índices de ácido y de éster y comparándolos con los del resinoide podemos deducir que los ésteres de éste son volátiles y han pasado con el aceite esencial y que los ácidos son también volátiles en gran proporción.

Cromatografía gaseosa. — Se aplicó la cromatografía gaseosa usando como fase fija "saib" en columna de 2 m × 1/4" y N_2 a presión de 4 psi (a una temperatura de 200°C). Se obtuvieron tres picos poco definidos y un pico grande bien definido, que correspondería al éster principal; también al comienzo picos invertidos de ácidos libres. Más adelante veremos el resultado obtenido para el aceite esencial total, cromatografiado también con "saib" a 175°C.

Separación e identificación de componentes.

1° *Acidos y alcoholes.* — Se investigaron primero los ácidos libres, extrayéndolos del aceite esencial mediante solución acuosa de carbonato de sodio al 5 %; se liberaron luego por agregado de ácido mineral y extrajeron con éter etílico. Se investigaron por formación de las sales de plata, por el método de Denigés ([19]). De esta manera se confirmó la presencia de ácido propiónico, predominante, junto con ácido isobutírico.

Se procedió luego a la saponificación del aceite libre de ácidos. Pudo así separarse los ácidos combinados como sales potásicas y los alcoholes por arrastre con vapor.

Los ácidos fueron liberados e investigados como antes se hizo con los libres, encontrando que también se trataba de una mezcla de propiónico e isobutírico.

Eliminado el alcohol que acompañaba a los alcoholes del aceite esencial, mediante lavados con agua salada y separación de la porción oleosa con éter de petróleo, se procedió a preparar el 3-5-dinitrobenzoato correspondiente. Se obtuvo un derivado que, después de varias recristalizaciones se presentó en placas marrones con punto de fusión 156°-157°C.

Con ese punto de fusión se encontraron: el alcohol beta-fenchílico, el borneol y el vetiverol primario.

Captando el pico mayor de la cromatografía gas-líquido (pico 11 de la del aceite completo, que se transcribe más adelante) en benceno y preparando el 3-5-dinitrobenzoato se obtuvo un derivado de punto

de fusión 156°C, lo que indica que el obtenido anteriormente correspondía a este componente; recogiendo, en otra cromatografía, ese componente y determinando el espectro de absorción en el ultravioleta se obtuvo una curva que se comparó con la de un vetiverol primario (se confirmó esto por ftalización en condiciones de reacción para alcoholes primarios).

Cuadro de valores de la absorción en el ultravioleta de soluciones alcohólicas de los resinoides, los aceites esenciales, el componente predominante y el vetiverol

Longitud de onda (milimu)	*Resinoides*		*Aceites esenciales*		*Componente mayor (crom. gaseosa)*	*Vetiverol*
	Ramas	*Hojas*	*Ramas*	*Hojas*		
	1 °/ooo		1 °/ooo			1 °/ooo
215	1,87	1,95	1,63	1,67	2,22	2,32
20	1,695	1,76	1,68	1,81	2,44	2,56
25	1,695	1,66	1,85	2,07	2,62	2,75
30	1,57	1,57	1,98	2,37	2,72	2,80
35	1,16	1,38	2,03	2,53	2,58	2,66
40	0,79	1,19	1,94	2,47	2,42	2,22
45	0,645	1,05	1,74	2,22	2,17	1,53
50	0,62	0,95	1,47	1,83	1,84	1,05
55	0,625	0,88	1,12	1,27	1,46	0,77
60	0,66	0,84	0,84	0,83	1,13	0,64
65	0,69	0,83	0,66	0,56	0,92	0,56
70	0,70	0,80	0,55	0,42	0,83	0,58
2	0,70	0,785	—	—	—	0,59
4	0,69	0,765	—	—	—	0,62
5	—	—	0,495	0,345	0,78	—
6	0,68	0,74	—	—	—	0,63
80	0,64	0,69	0,455	0,305	0,72	0,54
85	0,59	0,635	0,42	0,272	0,65	0,50
90	0,465	0,565	0,385	0,243	0,565	0,28
95	—	—	0,347	0,22	0,50	0,18
300	0,36	0,47	0,305	0,195	0,425	0,15
10	0,305	0,41	0,225	0,152	0,32	0,124
20	0,235	0,335	0,172	0,117	0,255	0,092
30	0,195	0,28	0,126	0,087	—	0,064
40	0,175	0,25	0,085	0,060	0,15	—
350	0,165	0,235	0,060	0,040	0,108	0,032

Se encontró que tanto el 3-5-dinitrobenzoato obtenido como la curva en el ultravioleta corresponderían al vetiverol, o bien a un alcohol de ese tipo. Se encontró una diferencia en el tiempo de retención para este alcohol y el de la paramela, cromatografiados en iguales condiciones (algo menor es el del vetiverol primario). También son distintos los tiempos de retención de los alcoholes alfa y beta santalol y guaiol.

En cuanto a los ésteres, que en la cromatografía gas-líquido, salen con Rf bajo, no corresponden a un alcohol sesquiterpénico; en cambio coinciden con los de terpinilo, cromatografiados en iguales condiciones.

2° *Fenoles.* — Se trató el aceite esencial con solución de HOK al 5 % sin separar componente alguno, por cuyo motivo se consideran ausentes los fenoles en el aceite esencial de hojas.

3° *Carbonílicos.* — Se ensayó la extracción mediante solución saturada de bisulfito sódico y luego con solución de sulfito sódico ([20]). Con la de bisulfito no se apreció extracción; lo indicaría no los hay o están presentes en muy pequeña cantidad. En cambio con la solución saturada de sulfito sódico pudo extraerse una cantidad apreciable de componentes carbonílicos, que serían cetonas. Se preparó la semicarbazona y la 2-4-dinitrofenilhidrazona correspondientes, encontrando, para la semicarbazona una temperatura de fusión de 145°C y para la 2-4-dinitrofenilhidrazona (cristales rojos) una temperatura de fusión de 166°C.

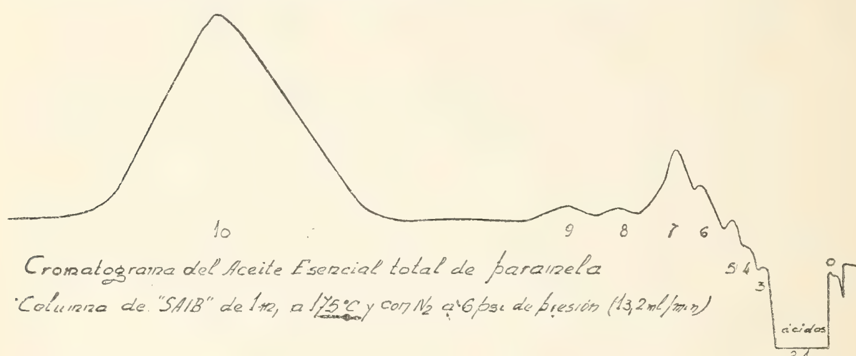
La cromatografía sobre placa de ácido silícico aglomerado con 10 % de almidón, dio dos manchas para la 2-4-dinitrofenilhidrazona antes mencionada, lo que indica se trata de una mezcla.

Cromatografía gas-líquido del aceite esencial de paramela completo (hojas y ramas) en columna "SAIB" de 1 m, a 175°C y 6 psi de nitrógeno (flujo 13,2 ml/min)

Pico	1°, grande invertido,	Tpo Ret.	1,3	min	Reac. éster positiva
Pico	2°, grande invertido,	Tpo Ret.	1,6	min	Reac. éster positiva
Pico	3°, pequeño normal,	Tpo Ret.	3,1	min	Reac. carbonílico positiva
Pico	4°, pequeño normal,	Tpo Ret.	4,0		
Pico	5°, peq.-med. normal,	Tpo Ret.	4,8	min	Reac. carbonílico positiva
Pico	6°, peq.-med. normal,	Tpo Ret.	6,4	min	Reac. carbonílico positiva
Pico	7°, mediano normal,	Tpo Ret.	7,1		
Pico	8°, med.-grande norm	Tpo Ret.	8,2	min	Reac. carbonílico positiva
Pico	9°, mediano normal	Tpo Ret.	12,6	min	Reac. carbonílico positiva
Pico	10°, mediano normal	Tpo Ret.	14,8	min	Corresponde a eugenol
Pico	11°, muy grande norm	Tpo Ret.	35,2	min	Alcohol sesquiterpénico

Tanto la cromatografía gas-líquido del aceite completo (hojas y ramas), como la directa del aceite completo sobre placa de ácido silícico, establecen la presencia de varios componentes carbonílicos (cinco la primera y seis la segunda técnica).

Mediante la cromatografía en placa recubierta con ácido silícico, directamente sobre el aceite esencial completo (hojas y ramas) revelando con solución de 2-4-dinitrofenilhidrazina en ClH 2N, previo desarrollo con mezcla de éter de petróleo 85: acetato de etilo 15, dio seis manchas, con los siguientes colores y valores de Rf:



1a. mancha,	anaranjada,	con Rf:	0,12
2a. mancha,	anaranjada,	con Rf:	0,17
3a. mancha,	anaranjada,	con Rf:	0,24
4a. mancha,	rojiza,	con Rf:	0,49, es la más intensa
5a. mancha,	amarilla,	con Rf:	0,56
6a. mancha,	amarilla,	con Rf:	0,74

En iguales condiciones, por ejemplo, se ha obtenido para:

pulegona, un Rf de	0,72
Carvona	0,66
cinamaldehido	0,48
vainillina	0,13
ald. anísico	0,40
o-metoxi-benzaldehido	0,52
metilbenzaldehido	0,61
cuminona	0,70
metilacetofenona	0,52
salicilaldehido	0,64
cuminaldehido	0,73

Se ha confirmado la pulegona, también ubicada en la cromatografía gas-líquido. No se han podido identificar los otros compo-

nentes. La mancha mayor parecería corresponder a un carbonílico bencénico.

El espectro de absorción en el ultravioleta de la 2-4-dinitrofenilhidrazona corresponde también a una cetona terpénica con doble ligadura conjugada con respecto al grupo carbonilo.

C. Características físicas y químicas del aceite esencial de ramas

Aspecto:	líquido oleoso límpido
Color:	pardo rojizo
Olor:	a frutos maduros, algo fenólico
Peso específico a 20°C:	0,9785
Indice de refracción a 20°C:	1,4926
Absorción en el ultravioleta (solución en etanol al 1 %):	máximo neto a 235 milimu
Indice de ácido:	39,9
Indice de éster:	84,6
Alcoholes (Fiore):	4,7 % en OH alcohólico
Fenoles:	contiene
Carbonílicos:	contiene

Cromatografía gaseosa. — Se realizó usando como fase fija "saib" al 10 % sobre tierra de infusorios lavada y malla 80; en columna de vidrio de dos metros de largo y 1/4 de pulgada de diámetro, a 150°*C* y a 200°*C*, obteniendo picos poco definidos. Mejor resultado se obtuvo posteriormente con el aceite esencial total (de hojas y ramas en conjunto) usando la misma fase, pero columna de un metro y a 175°C, con una presión de nitrógeno de 6 psi (13,2 ml/min de flujo) cuyo detalle ya se ha transcripto.

Separación e identificación de componentes.

1° *Acidos y alcoholes.* — Como en el caso del aceite esencial de hojas, se procedió primero a separar los ácidos libres mediante solución de carbonato de sodio al 5 % y liberados éstos por adición de ácido mineral, a reconocerlos a través de sus sales de plata, aplicando el método Denigés. Se encontró también que estaban constituidos por una mezcla de ácido propiónico y ácido isobutírico.

Otro tanto se encontró para los ácidos combinados, después de saponificar el aceite esencial liberado de los ácidos libres.

En cuanto a los alcoholes, una vez aislados, como en el aceite de hojas, se preparó el 3-5-dinitrobenzoato, obteniendo un derivado, en placas marrón claro, que fundió a 133°C.

Como en el caso del aceite de hojas el pico final, predominante, correspondería al mismo alcohol, coincidiendo el espectro de absorción en el ultravioleta.

2° *Fenoles.* — Aislados del aceite esencial mediante solución de HOK 5 % y liberados mediante ácido mineral, la cromatografía en placa da los tres fenoles superiores que se obtuvieron en la cromatografía del resinoide de ramas; corresponden a los tres fenoles volátiles por vapor. Se preparó también el 3-5-dinitrobenzoato de la mezcla, que al observarlo en el microscopio de Kofler, empleado para determinar el punto de fusión, apareció como una mezcla de cristales que fundieron sucesivamente a 145°C, 158°C y 168°C. Estos puntos de fusión corresponden, como los Rf de la cromatografía en placa, a los fenoles:

fenol común (3-5-dinitrobenzoato pto fusión 145°C)
isoeugenol (3-5-dinitrobenzoato pto de fusión 158°C) y
o-cresol (3-5-dinitrobenzoato pto de fusión 168°C).

En cuanto a la cromatografía gas-líquido, el pico N° 10 corresponde a eugenol. Corresponde destacar que en la cromatografía en placa, tanto el eugenol como el isoeugenol presentan Rf similar. Como el 3-5-dinitrobenzoato dio pto de fusión correspondiente a isoeugenol podría ser que el eugenol se hubiera isomerizado al aislarlo de la esencia para obtener aquel derivado.

3° *Carbonílicos.* — Como en el aceite de hojas se extrajeron mediante absorción con solución de sulfito sódico saturada. Del extracto cetónico obtenido se preparó una 2,4dinitrofenilhidrazona con temp. de fusión 163°C que sobre placa de ácido silícico dio también dos manchas, como en el caso del aceite de hojas. Se deduce que contiene los mismos componentes carbonílicos que aquél.

Resumen. — La composición de los aceites esenciales obtenidos de hojas y de ramas es similar, con excepción de los componentes fenólicos, que se encuentran en el de ramas y faltan en el de hojas; los ácidos y ésteres son los mismos, variando solamente en la proporción relativa; en ambos se encuentra un alcohol libre en alta proporción, sesquiterpénico y del tipo del vetiverol primario y los mismos componentes carbonílicos.

En cuanto a los resinoides obtenidos de hojas y de ramas presentan mayor diferencia de composición: en el de hojas hay más ácidos libres y mucha menor proporción de ésteres que en el de ramas, en el que se encontró un diez por ciento de componentes fenólicos, ausentes en el de hojas.

Conclusiones. — La Adesmia boronioides (paramela vulgarmente) rinde un alto porcentaje de resinoides alcohólicos de hojas y de ramas y mediano de aceites esenciales. El aroma de unos y otros es muy particular, agradable algo diferente en el de ramas por la presencia de fenoles. Sus componentes son fundamentalmente terpénicos y sesquiterpénicos e incluyen ácidos (propiónico e isobutírico), sus ésteres (en alta proporción) y un alcohol libre sesquiterpénico, abundante, así como varios componentes carbonílicos y tres fenólicos en el de ramas.

Sería interesante investigarlo desde el punto de vista fármaco lógico, ya que es desde ese punto de vista que se lo emplea popular mente.

BIBLIOGRAFIA

(1) Fester, G. A.: Anales As. Quím. Arg., XVII, 230 (1929).

(2) Montes, A. L. y González M. E.: Anales As. Quím. Arg., XLII, 152 (1954).

(3) Montes, A. L.: Anales Direc. Nac. de Química. Bs. As., VIII, 15 (1955).

(4) Fester, G. A.: "Aceites esenciales de la Rep. Argentina". Ac. Nac. de Ciencias, Córdoba 1961, p. 70.

(5) Cabrera, A. L.: Rev. Museo La Plata. Nva. Serie II, Sec. Botánica, 3/64 (1938).

(6) Montes, A. L.: "Analítica de los Productos Aromáticos" INTA, Buenos Aires, 1961, Cap. III, p. 133 y sgtes.

(7) Montes, A. L.: obra citada (6), Cap. VI, p. 231.

(8) Montes, A. L.: obra citada (6), Cap. VI, p. 238.

(9) Montes, A. L.: obra citada (6), Cap. I, p. 39.

(10) Véase (7).

(11) Guenther, E.: "The Essential Oils". N. York 1949, vol. II, p. 815.

(12) Montes, A. L.: Anales As. Quím. Arg. Bs. As., L, 3 (1962).

(13) Burkart, A.: "Las leguminosas argentinas silvestres y cultivadas". Buenos Aires, 1952, p. 210.

(14) Reiche, C.: "Flora de Chile", II, 166 (1898).

(15) Gay, C.: "Historia física y política de Chile" II, 182 (1946).

(16) Montes, A. L.: obra citada (6), p. 351.

(17) Montes, A. L.: obra citada (6), Cap. I.

(18) Vázquez, A. y Montes, A. L.: Comunicación sobre cromatografía de fenoles en prensa (Anales As. Quím. Arg.).

(19) Grignard, V.: "Traité de Chimie Organique", vol. IX, París 1939, p. 14.

(20) Montes, A. L.: obra citada (6), Cap. III, 173.

Cátedra de Bromatología y Análisis Ind.
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Universidad Nacional de Buenos Aires.

BIBLIOGRAFIA

SERVICIO METEOROLOGICO NACIONAL, 1962. *Atlas climático de la República Argentina.* 1 vol. de 81 mapas en colores + 6 páginas; formato de 35 × 46 centímetros. Buenos Aires.

Amplia aceptación tendrá, sin duda, en las esferas científicas y técnicas del país, particularmente en aquellas interesadas en los enfoques geográficos, este atlas climatológico en colores, de reciente aparición.

En efecto, hace ya casi medio siglo que se imprimió el último atlas, oficial, climatológico argentino, cuando G. G. Davis, en 1914, incluyó 34 mapas de este tipo en la publicación titulada "Servicio Meteorológico Argentino. Historia y organización con un resumen de los resultados".

El nuevo atlas, oficial, presenta dos grandes ventajas respecto al viejo de 1914; una es que incluye un número más elevado de mapas (81 en cambio de 34) y la otra que los mapas son apreciablemente más grandes, siendo su escala de 1/10.000.000. Aparte de ello, las series de observaciones son más largas y de idénticos años para todos los observatorios usados para trazar un mapa dado.
Los aspectos que encara el atlas son los siguientes: temperatura del aire, precipitaciones (cantidad y días), presión atmosférica, tensión de vapor, humedad relativa y nubosidad (días claros y cubiertos).

Para todos los aspectos señalados, siempre se encuentra el mapa que presenta las isolíneas correspondientes a los valores medios del año. Aparte de éste, se hallan otros mapas, con valores medios para algunos meses representativos, pero en los casos especiales de la temperatura, cantidad de precipitación, días con más de 3 milímetros de precipitación y humedad relativa, los valores medios son dados, en cada oportunidad, en 12 mapas distintos: uno para cada mes del año.

Para la temperatura del aire, que es elemento climático más detalladamente tratado, a los 13 mapas citados, se les agregaron los 6 siguientes:

a) amplitud anual de los valores medios mensuales;
b) temperatura mínima anual media;
c) temperatura máxima anual media;
d) amplitud anual media de la temperatura;
e) temperatura mínima absoluta;
f)*zz*temperatura máxima absoluta.

Ha sido un gran acierto la inclusión del mapa del punto b), pues la temperatura mínima *extrema* de cada año y, luego su *promedio* para una serie de años de observaciones, es un parámetro de gran utilidad en climatología agrícola, cuando se desea estudiar la posibilidad de implantar, en una región, cultivos *perennes* que mueren a determinadas temperaturas frías, tales como el cacao, ananás, banano, frutales cítricos, datilera, olivo, higuera. etc,

Las series de observaciones usadas para trazar los diversos mapas son las siguientes:

*z*I) serie 1901-1950, para temperatura, tensión de vapor y humedad relativa;
II) serie 1901-1948, para nubosidad;
III) serie 1921-1950, para precipitación, tanto en lo referente a –a cantidad en milímetros, como a los días de precipitación;
IV) serie 1939-1948, para la presión atmosférica.

Las series que preceden fueron tomadas directamente de los mapas, pues las que señala la *Introducción* del atlas no concuerdan con éstas, en lo que se refiere a las series II) y IV). Al respecto, sería conveniente agregar una Fe de Erratas,

para saber a que atenerse; lo mismo cabe decir respecto al año de publicación del atlas, pues en la tapa se indica el año 1960, no obstante que al dorso de la portada y en los 13 mapas de cantidad de precipitación, está consignado el año 1962. Por otra parte, no estaría de más, particularmente para el lector no especialista o de otro país, preciasr, con toda claridad, qué se debe entender por verano e invierno, al tratar la nubosidad. Asimismo ,dado que para los mapas de isotermas no se especifica nada, sería conveniente aclarar que, en los mapas de presión atmosférica, las líneas isobáricas se hallan reducidad al nivel del mar.

En síntesis, se puede afirmar que el *Atlas Climático de la República Argentina* será recibido con gran beneplácito por los estudiosos argentinos y extranjeros.

A. L. De Fina

I. D. Zhongolovich - V. M. Amelin: "Tables and Nomograms for the Processing of Observations made on Artificial Earth Satellites". Traducción del ruso al inglés por P. Baju. 195 págs. Pergamon Press, 1961.

La finalidad de la obra es, según expresan sus autores en el prefacio, facilitar la labor de aquellos encargados de preparar efemérides y programas de observaciones. La misma contiene las siguientes tablas:

I) Período de revolución y semieje mayor de la órbita en función del movimiento diurno del satélite artificial.

II) Valores del cociente radio vector, semieje mayor y de la diferencia de anomalía verdadera y anomalía media en función de la anomalía media y la excentricidad de la órbita.

III) Coordenadas geocéntricas ecuatoriales y locales del satélite en función de la inclinación de la órbita y el argumento de la latitud, o bien en función de las latitudes y longitudes geocéntricas del observador y el satélite respectivamente.

IV) Valores aproximados de las perturbaciones seculares del satélite debidas al aplanamiento terrestre.

Una colección de nomogramas permite el cálculo de la altitud topocéntrica del satélite en función de la altitud geocéntrica y del cociente de radios vectores satélite-observador como así también la determinación de la distancia satélite-observador en función de la altura aproximada y de la distancia cenital geocéntrica del satélite.

Se ha incluido una tabla para interpolar empleando diferencias segundas a efectos de facilitar la labor del calculista.

En suma: se trata de una obra de utilidad para aquellos interesados en la observación de satélites artificiales.

Carlos Raitzin

"Popular lectures in mathematics, Volumes 1 to 6" Aprox. 455 págs. Traducido del ruso por I. Sneddon y H. Moss. Pergamon Press, 1961.

Contenido:

I) "The Method of Mathematical Induction" por I. S. Sominskii.

II) "Fibonacci Numbers" por N. N. Verobév.

III) "Some Applications of Mechanics to Mathematics" por V. A. Uspenskii.

IV) "Geometrical Constructions using Compasses only" por A. N. Kostovskii.

V) "The Ruler in Geometrical Constructions" por A. S. Smogorzhevskii.

VI) "Inequalities" por P. P. Korovkin.

El libro está destinado a estudiantes secundarios adelantados y a los del primer bienio universitario siendo el nivel general adecuado para los mismos. No obstante puede resultar también de utilidad en estudios más avanzados por reunir un cúmulo de resultados generalmente dispersos pero de aplicación constante. En tal sentido son destacables I y VI y en menor grado II.

Carlos Raitzin

"Four Place Tables of Transcendental Functions, por W. Flugge. Pergamon Press. London, 1954, 136 págs.

Este libro abarca una escala amplia de tablas utilísimas de funciones trascendentes para el uso diario en el campo de la ingeniería y de la física. Los valores dados por estas tablas son de mayor exactitud de los que se pueden obtener con la regla de cálculo; existe la ventaja de que los intervalos entre los valores tabulados son pequeños y de este modo permiten evitar o disminuir la necesidad de interpolaciones.

El contenido del libro es el siguiente:

Una serie de fórmulas trigonométricas e hiperbólicas con los respectivos desarrollos en serie, fórmulas de conversión en formas exponenciales, algunos teoremas adicionales, derivadas e integrales.

Tablas de funciones trigonométricas e hiperbólicas con los valores de ángulos dados en grados y en radianes.

Tablas de funciones exponenciales: $e^x - 1$; $e^{-x} \ln x$.

Funciones de Bessel, con una introducción sumamente completa de fórmulas de las funciones de Bessel y funciones de Bessel modificadas, y las relaciones entre ellas.

Tablas de dichas funciones. Los valores de las funciones $Y_2; Y_2(0 \leq x \leq 10)$ y de las funciones de Bessel modificadas $K_2; K_2(0 \leq x \leq 5)$ fueron extraídos de las Tablas Matemáticas (vol. VI) de la Asoc. Británica para la Promoción de la Ciencia y de la Sociedad Real de Londres.

Funciones de Thomson (o de Kelvin) con una introducción de fórmulas amplia que incluye la relación de las funciones de Thomson con las de Bessel y algunas ecuaciones diferenciales.

Tablas de las funciones de Thomson.

Integrales elípticas con las tablas correspondientes.

Algunas funciones trascendentes de mucha aplicación como: la función error, integrales de Fresnel, integrales de seno, coseno y exponenciales, y función gamma, todas con sus tablas correspondientes. Los valores de la función gamma fueron extraídos de las tablas Ist. Naz. Assicurazioni del profesor G. Cassinis de Milano.

La obra concluye con una lista corta de las constantes trascendentes de uso más frecuente: π, ε y γ.

Eva Hoffman

Jean Kovalevsky: "Introduction a la Mécanique Céleste". 221 págs. Armand Colin, París, 1963.

Esta bella obrita puede dar *prima facie* la impresión de coincidir en finalidad y extensión con la bien conocida del Prof. Chazy (P.U.F. 1953). No es así sin embargo, pues ambas persiguen objetivos distintos.

La de Chazy constituye una versión modernizada de las "Leçons" de Poincaré, y, salvo breves incursiones en la Teoría de la Relatividad, se ciñe estrictamente a los moldes clásicos. En cambio, la idea directriz del libro que nos ocupa es proveer una adecuada introducción al estudio de los métodos de computación empleados en la determinación de órbitas de satélites artificiales, —constituyen, a nuestro parecer, en tal sentido una óptima introducción a obras de mayor alcance, como sería por ejemplo la de Brouwer y Clemence.

No obstante, los desarrollos clásicos no son descuidados. Partiendo de los fundamentos de la Mecánica Clásica son tratados sucesivamente el problema de dos cuerpos, la teoría de las ecuaciones y transformaciones canónicas, el teorema de Hamilton-Jacobi, las variables de Delaunay y la variación de los elementos de la órbita. A continuación (cap. 4) se estudian las expansiones de la función perturbadora de uso más frecuente. El capítulo 5 constituye la parte medular del texto, estando dedicado al estudio de trayectorias de satélites artificiales, empleándose el potente método de Von Zeipel. Los dos capítulos finales han sido reservados por el autor a las nociones básicas de la teoría de la luna (con referencias a la labor de Delaunay, Hill-Brown y Hansen) y de las perturbaciones planetarias, con breve reseña introductoria sobre los métodos numéricos de integración.

En suma, podemos afirmar que se trata de una obra útil, siendo su lectura provechosa, atrayente y sencilla.

Carlos Raitzin

INDICE GENERAL DEL TOMO CLXXV

Correo Argentino Central "B"
FRANQUEO PAGADO Concesión Nº 1186
TARIFA REDUCIDA Concesión Nº 6247